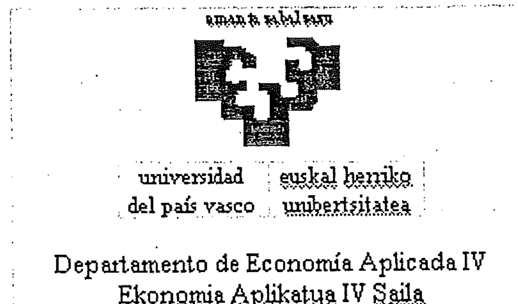


Investigación Operativa (3º LADE)

Relación de Problemas Curso 2006-07
Tema 1: Programación Lineal Entera

Programación Lineal Entera

1. Sea el problema de P.L.E:

$$\begin{array}{ll} Max & (4x_1 + 3x_2) \\ s.a. & \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 9x_2 \leq 26 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 17 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{array} \right. \end{array}$$

   Resolverlo utilizando el método de *ramificación y acotación.*

2. Una Compañía de automóviles fabrica coches de lujo y sabe que la mayoría de sus clientes son hombres y mujeres de ingresos altos. Con el objeto de llegar a estos grupos ha creado una ambiciosa campaña publicitaria en la televisión y ha decidido comprar un minuto de anuncio comercial en dos tipos de programas: películas y partidos de fútbol. Las películas tienen una audiencia de 7 millones de mujeres de ingresos altos y 2 millones de hombres. Cada partido de fútbol lo ven 2 millones de mujeres y 12 millones de hombres de la categoría social estudiada. Cada minuto de anuncio entre películas y entre partidos de fútbol le cuesta 50000 € y 100000 € respectivamente. A la compañía le interesa que el anuncio lo vean, al menos 28 millones de mujeres y al menos 24 millones de hombres.

   Determinar cuántos anuncios de un minuto de duración de cada tipo debe contratar para minimizar el coste total.

3. Una Compañía fabrica dos productos A y B. El volumen de ventas para el producto A es al menos el 60% de las ventas totales de ambos productos. Para la elaboración de ambos productos se utiliza la misma materia prima de la que se dispone diariamente de 100 kg. Cada unidad del producto A requiere diariamente de 3 kg de la materia prima y cada unidad de B de 4 kg. Los precios unitarios de venta para los productos A y B son de 20 y 40 unidades monetarias respectivamente.

   (a) Determinar la cantidad que se debe producir de cada producto para maximizar los ingresos.

   (b) La Compañía se está planteando utilizar una nueva materia prima, que pueda sustituir a la anterior, con una disponibilidad diaria de 30 kg. Cada unidad del producto A requiere diariamente de 1 kg de esta nueva materia prima y cada unidad de B de 1 kg. Modelizar el problema teniendo en cuenta que sólo se puede utilizar una de las dos materias primas.

4. Un contrabandista desea pasar objetos a través de una frontera en un depósito oculto que es capaz de contener un máximo de 91 kg. Los elementos que se pueden transportar, su peso y la ganancia asociada a cada uno de ellos se detallan en la siguiente tabla:

Elemento	Peso (kg)	Valor (miles €.)
1	36	54
2	24	18
3	30	60
4	32	32
5	26	13

   Modelizar el problema para determinar los objetos a transportar para que la ganacia sea máxima.

5. Debido al exceso de contaminación en el río de una determinada población se van a construir unas depuradoras. Para ello, se están considerando 3 zonas posibles para su instalación. Cada una de las zonas dispondrá, a lo sumo, de una depuradora. Se ha medido el nivel de dos contaminantes (contaminante A y contaminante B). En la zona 1, cada tonelada de agua contiene 0.04 toneladas

de contaminante A y 0.03 toneladas de contaminante B; en la zona 2, 0.025 toneladas de A y 0.02 toneladas de B y en la zona 3, 0.02 de A y 0.025 de B. La legislatura estatal impone que se eliminen del rio, al menos 8000 toneladas del contaminante A y al menos 5000 toneladas del contaminante B cada año. Los costes en € se muestran en la siguiente tabla:

	Coste de Construcción	**Coste de Tratamiento por Tn**
Zona 1	100	20
Zona 2	60	30
Zona 3	40	40

Modelizar el problema para minimizar el coste total.

6. La junta de directores de una empresa manufacturera está considerando 7 grandes inversiones de capital. Sean R_i y C_i, respectivamente, el rédito total y el coste de la inversión i. Las inversiones 1 y 2 son mutuamente excluyentes. La inversión 3 sólo se puede realizar si se invierte en la 1. Si se realiza la inversión 1 y la 4 necesariamente se ha de invertir en la 5. En el caso de que se invierta en la 2 o en la 3 no podrá llevarse a cabo la inversión 6. La junta desea maximizar el rédito total invirtiendo no más de D dólares en total y teniendo en cuenta las condiciones anteriores. Modelizar este problema como un problema de programación lineal entera.

7. La división de investigación y desarrollo de una compañía ha venido desarrollando cuatro líneas posibles de nuevos productos. La administración debe ahora tomar la decisión sobre cuáles de estos cuatro productos se van a producir y a qué niveles. Han pedido al departamento de investigación y desarrollo que formule un modelo de programación matemática para encontrar la mezcla de productos más rentable.

   La puesta en marcha de la producción de cualquier producto trae consigo un costo sustancial fijo, que se proporciona en la tabla (en €) junto con el ingreso unitario.

Producto	**1**	**2**	**3**	**4**
Coste Fijo	50000	40000	70000	60000
Ingreso	70	60	90	80

   Por políticas de la empresa, la gerencia ha impuesto las siguientes restricciones:

   - No se pueden producir más de dos de estos productos.
   - Si no se produce ni del producto 1 ni del producto 2 entonces no se puede producir del 3.
   - Todos los productos deben de realizarse en una de las dos plantas disponibles: la planta A o la planta B, que disponen, cada una de ellas de una capacidad de 6000 hrs. de trabajo. Debido a la diferencia en la maquinaria de cada planta, una unidad del producto 1 requiere 5 hrs. en la planta A y sólo 4 hrs. en la B, el producto 2 requiere 3 en la planta A y 6 en la B, para el producto 3 se requieren 6 hrs./unidad en la A y 3 en la B y para cada unidad del 4 se requieren 4 hrs. en la A y 5 en la B.

8. Una empresa está planificando ampliar sus actividades en un área abriendo dos almacenes. Está considerando tres posibles ubicaciones para los mismos. Normalmente sumistra a 4 clientes cuyas demandas son d_1, d_2, d_3, d_4. Desde la ubicación 1 sólo se puede suministrar a los clientes 1, 2 y 4, desde la ubicación 3 puede suministrar a los clientes 2, 3 y 4 y desde la ubicación 2 a todos los clientes. El coste por unidad de transporte desde la ubicación i al cliente j es $c_{i,j}$. Para cada ubicación del almacén se tienen, además, los siguientes datos:

Ubicación	Capacidad	Inversión Inicial $	Coste por unidad de Operación $
1	a_1	k_1	p_1
2	a_2	k_2	p_2
3	a_3	k_3	p_3

Modelizar el problema con el objetivo de seleccionar la ubicación apropiada de los 2 almacenes que minimice el coste total.

9. Resolver utilizando el método de *ramificación y acotación* el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\begin{array}{ll} Min & (6x_1 + 10x_2) \\ s.a. & \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \geq 28 \\ 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{cases} \end{array}$$

10. Un inversionista va a invertir 500 € y ha limitado sus posibles alternativas a 3 pequeñas compañías. Las cantidades que se pueden invertir en cada compañía son 0 ó 100 ó 200 ó 300 ó 400 ó 500 €. En la tabla se presentan los beneficios estimados para diferentes cantidades de capital invertido en cada compañía. Modelizar el problema como un problema de PLE, sin resolver, si se desea determinar la estrategia óptima de inversión.

Cantidad	Cía 1	Cía 2	Cía 3
100	10	20	10
200	10	20	20
300	30	20	20
400	40	30	30
500	40	30	40

11. Dado el siguiente problema de P.L.E:

$$\begin{array}{ll} Min & (1'5x_1 + x_2) \\ s.a. & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 7 \\ 12x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0; \, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{cases} \end{array}$$

(a) Resolver el problema mediante el método de ramificación y acotación.

(b) Contestar razonadamente a las siguientes preguntas teniendo en cuenta lo obtenido en el apartado (a):

b_1. Si las condiciones de las variables fueran: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ y x_2 entera ¿cambiaría la solución óptima del problema?¿Y en el caso de que $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ y x_1 entera?

b_2. ¿Cuál sería la solución óptima si en el problema inicial se añade la restricción: $x_2 \leq 2$?

12. Un administrador de cartera tiene 1000000 € para ser invertidos entre una lista de 5 bonos. Sabe que el rendimiento neto de la inversión de 1 € en el bono A es de 0,05 €, 0,07 en B, 0,08 en C, 0,06 en D y 0,08 en E. Para mantener un equilibrio en su inversión, ha adoptado dos reglas internas:

- No invertir más de 500000 € en un solo bono.
- Si invierte algo en un bono, lo hará por lo menos con 500 €.

Además ha de tener en cuenta que:

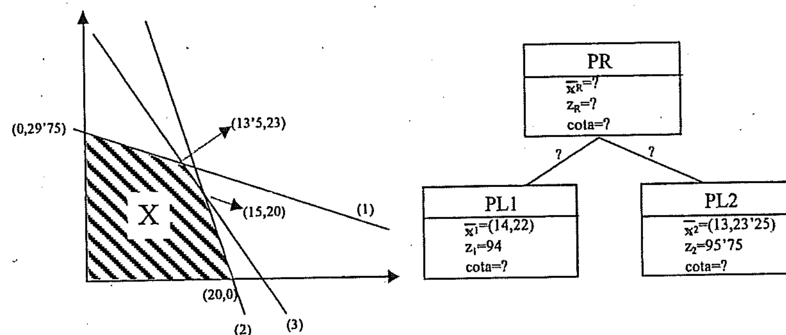
- Si compra del bono C debe comprar del A.
- Se podrá realizar la inversión E sólo si invierte en el B.
- La cantidad invertida en el bono C no debe exceder del 30% de la realizada conjuntamente en el D y en el E.

El administrador pretende maximizar el rendimiento total de su inversión sujetándose a estas condiciones. Plantear este problema como un problema de programación lineal entera.

13. Sea el problema de PLE:

$$\begin{array}{ll} Max & (2x_1 + 3x_2) \\ s.a. & \left\{ \begin{array}{ll} 2x_1 + 4x_2 \leq 119 & (1) \\ 4x_1 + x_2 \leq 80 & (2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 50 & (3) \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \text{ y enteras} & \end{array} \right. \end{array}$$

donde el conjunto de soluciones factible X del problema relajado es:



(a) Completar, razonadamente, los datos que faltan (indicados por una interrogación) en el árbol anterior correspondiente al método de ramificación y acotación y continuar el árbol en el caso de que sea necesario para obtener la solución óptima del problema.

(b) Si el coeficiente de x_1 en la función objetivo aumenta de 2 a 6, ¿cuál sería la solución óptima del problema?

14. Si y_1, y_2, y_3 e y_4 son variables cuyos valores son 1, si se va a abrir una planta en particular, y 0, en cualquier otro caso. Modelizar mediante restricciones lineales cada una de las siguientes condiciones:

(a) Si se abre la planta 1, entonces la planta 2 no se abre.

(b) Al menos una de las cuatro plantas debe abrirse.

(c) No más de dos de las cuatro plantas deben abrirse.

(d) Si ni la planta 2 ni la planta 3 se abren, entonces la planta 1 no se abre.

(e) Si se abre la planta 4 o la planta 3 no se abre, entonces la planta 2 se abre.

15. Una empresa se está planteando fabricar unas determinadas piezas necesarias para su producción. La empresa puede elegir entre 5 piezas de diferente tipo. El coste unitario de fabricar una pieza del tipo i, es c_i y el coste fijo de puesta en marcha de la producción de piezas del tipo i es K_i (i=1,...,5). Para la fabricación de estas piezas la empresa dispone de dos tipos de máquinas 1 y 2. El número de horas que cada pieza de cada tipo requiere en cada una de las máquinas se recoge en la siguiente tabla:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Máquina 1	2	3	4	1	3
Máquina 2	4	5	2	3	2

Se consideran las siguientes condiciones:

- Sólo se puede utilizar una de las dos máquinas.
- Se fabricarán sólo 3 tipos de piezas.
- Si se fabrican piezas del tipo 1, entonces hay que fabricar piezas de alguno de los dos tipos: 3 o 5.
- El número de horas semanales que cada máquina puede operar es al menos 50 y no más de 100.

Modelizar el problema como un P.L.E.

16. Una compañía está considerando la puesta en marcha en producción de tres nuevos productos A, B y C. La gerencia ha solicitado al departamento de marketing que le informe sobre la inversión necesaria para lanzar al mercado cada uno de ellos y al departamento de ventas el precio unitario al que se puede ofrecer cada producto. La información recogida se presenta, en €, en la siguiente tabla:

	Producto A	Producto B	Producto C
Coste fijo de marketing	25000	35000	30000
Precio por unidad	35	45	40

Todos los productos deben ser objeto de procesamiento en las dos plantas de la Compañía, la 1 y la 2, cada una de ellas con una capacidad de 6000 horas de trabajo. El tiempo necesario para producir una unidad del producto A en la planta 1 es de 5 horas y en la 2 de 4, para una unidad del producto B se precisan 6 horas en la planta 1 y 4 en la 2 y para una unidad del producto C se precisan 3 horas en la planta 1 y 5 en la 2. Por razones de poder de mercado, la empresa sacará al mercado al menos uno de los productos. La gerencia debe decidir sobre cuáles de estos productos debe producir y a qué niveles para maximizar su beneficio neto.

(a) Modelizar este problema como un modelo de programación lineal entera.

(b) Si la compañía además se plantea aumentar la capacidad en 1000 h. de trabajo en una sola de sus plantas, modelizar el problema, añadiendo esta información, como un modelo de programación lineal entera.

17. (a) Resolver el siguiente problema de programación lineal entera con el método de ramificación y acotación.

$$Max\,(10x_1 + 15x_2)$$
$$s.a. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{cases}$$

(b) Teniendo en consideración la respuesta anterior, resolver el siguiente problema de programación lineal entera

$$Max\,(10x_1 + 15x_2 - 5z)$$
$$s.a \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ 10x_1 + x_2 \leq Mz \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} \\ z = 0 \text{ ó } 1 \end{cases}$$

donde M es un número muy grande.

18. Una empresa de juguetes ha desarrollado tres nuevos modelos de juguetes (1, 2 y 3) para su posible inclusión en la próxima campaña de Navidad. Los costes de arranque para la fabricación de los modelos 1, 2 y 3 serían 50.000€, 80.000€ y 70.000€ respectivamente y la ganancia unitaria sería de 10€, 15€ y 13€ respectivamente. La empresa dispone de tres plantas de producción para la elaboración de estos modelos, pero para evitar gastos sólo en una de ellas se producirán los juguetes. El número de juguetes por hora que se pueden producir en cada una de las plantas es:

	juguete1	juguete2	juguete3
Planta1	50	40	60
Planta2	40	25	20
Planta3	35	30	20

Las plantas disponen de 500, 600 y 630 horas de producción respectivamente. La gerencia ha decidido desarrollar uno o dos de los tres modelos de juguetes.

(a) Modelizar el problema utilizando la P.L.E. para maximizar el beneficio total.

(b) La empresa decide producir únicamente juguetes de tipo3, pero debe tener en cuenta que si produce más de 50 unidades de este tipo de juguete entonces:

- El coste de preparación de instalaciones del juguete tipo 3 es de 40000 €.

- Debe producir en la planta 3

Modelizar el problema, añadiendo esta información, utilizando la P.L.E.

19. Modelizar como problema de programación lineal entera (sin resolver): Una universidad se encuentra en un proceso de formar una comisión. Diez personas han sido nominadas: A, B, C, D, E, F, G, H, I y J. El reglamento obliga a que sean incluidos al menos una mujer, un hombre, un estudiante, un administrativo y un profesor, y que el número de mujeres sea igual que el de hombres, y que el número de profesores no sea inferior al de administrativos. La mezcla de los nominados en las distintas categorías es como sigue:

Categoría	**personas**
Mujeres	A,B,C,D,E
Hombres	F,G,H,I,J
Estudiantes	A,B,C,J
Administrativos	E,F
Profesores	D,G,H,I

Hallar las personas que formarán la comisión si se trata de que sea lo más reducida posible.

20. Una empresa produce dos compuestos C1 y C2. La planta de producción actual emplea a 10 trabajadores que trabajan 40 horas semanales, lo que proporciona un máximo de 400 horas de trabajo disponible. Cada unidad de C1 requiere de 3 horas de trabajo y cada unidad de C2 de 2 horas. La empresa debe decidir si continua con la planta de producción actual o si debe sustituirla por una nueva con la misma capacidad de trabajo pero en la que las horas de trabajo para C1 y C2 serían de 2 y 3 horas, respectivamente. La demanda del compuesto C2 está limitada a un máximo de 125 unidades semanales. La empresa desea alcanzar el máximo beneficio sabiendo que el beneficio unitario para C1 y C2 es de 300 y 500 unidades monetarias, respectivamente.

(a) Modelizar el problema como un problema de programación lineal entera (PLE).

(b) Teniendo en cuenta que la decisión óptima de (a) es continuar con la planta de producción actual, la empresa puede contratar ahora hasta 3 trabajadores más, con un coste semanal de 800 u.m. por empleado. La gerencia también puede considerar ampliar las planta de producción con un coste de 200.000 u.m. Esta expansión permitiría a la empresa, contratar hasta 8 trabajadores adicionales, 5 más de los que se podrían contratar sin la expansión. Modelizar el nuevo problema como un P.L.E.

21. Modelizar sin resolver: Una inmobiliaria desea promocionar una nueva urbanización mediante una campaña publicitaria. Para ello dispone de 5 tipos de anuncios: anuncios en televisión local al mediodía (tvm), anuncios en televisión local a la noche (tvn), anuncios en periódico local (per), anuncios en suplemento dominical local (sup) y anuncios en radio local por la mañana (rad). La empresa ha reunido datos sobre la cantidad de clientes potenciales, el coste y la evaluación de las unidades de calidad de la exposición de cada anuncio que se recogen en la siguiente tabla

Anuncios	Clientes potenciales	Coste(€)	Calidad exposición
Tvm	1000	1500	65
Tvn	2000	3000	90
Per	1500	400	40
Sup	2500	1000	60
Rad	300	100	20

El número máximo disponible de anuncios de cada tipo es: 15, 10, 25, 4 y 30 respectivamente. La inmobiliaria, aconsejada por una agencia de publicidad, decide utilizar al menos 10 anuncios en la televisión, alcanzar por lo menos 50.000 clientes potenciales, no gastar más de 18.000 euros en anuncios en televisión, y si se hacen anuncios en el periódico entonces no hacer anuncios en la televisión por la noche. El presupuesto máximo para la campaña publicitaria es de 30.000 euros. Si se busca maximizar la calidad de la promoción, ¿cómo se planificará?

22. Una empresa que fabrica electrodomésticos está pensando abrir una nueva factoría para producir 3 modelos de lavadora: gama alta, media y baja. Tiene dos posibles ubicaciones: 1 y 2. La inversión necesaria para construir la fábrica en la ubicación 1 es de 2000000 u.m. y de 1750000 u.m. en la ubicación 2. Los costes unitarios de producción son 15 u.m., 13 u.m. y 10 u.m., respectivamente para gama alta, media y baja, en la ubicación 1 y 16 u.m., 12 u.m. y 9 u.m., respectivamente, en la 2.

    De la gama alta se han de producir al menos 75000 unidades anuales, 100000 de la media y 200000 de la baja.

    (a) Si sólo se va a construir una factoría, modeliza el problema con el objetivo de minimizar costes.

    (b) Si se incluye la posibilidad de construir la dos factorías (ubicación 1 y 2), modeliza el problema con el objetivo de minimizar costes considerando, además, las siguientes restricciones:

    - En caso de producirse lavadoras de gama baja en la ubicación 1 se recibirá una subvención de 1000000 u.m.

    - La gama alta se producirá únicamente en una de las dos ubicaciones.

23. Una fábrica produce 4 tipos de jabones, para lo cual son necesarios 5 componentes. En la siguiente tabla se muestran las cantidades necesarias para realizar una pastilla de jabón de cada tipo.

	aceite	agua	sosa cáustica	glicerina	esencia de limón	esencia de fresa
J1	250 ml	240 ml	42 gr	1 gr	1 ml	3 ml
J2	200 ml	210 ml	2 gr	40 gr	2 ml	1 ml
J3	230 ml	240 ml	20 gr	25 gr	3 ml	1 ml
J4	180 ml	200 ml	10gr	35 gr	1 ml	3 ml

La fábrica dispone de 150.000 ml de aceite, 160.000 ml de agua, 12 kg de sosa cáustica, 3 kg de glicerina, 2.000 ml de esencia de limón y 3.000 ml de esencia de fresa por día.

Se tiene que producir al menos un tipo de jabón al día y como mucho tres. Además si se producen jabones del tipo 1 no se podrán producir del tipo 4.

El beneficio por cada pastilla de jabón es de 10, 13, 15 y 11 euros respectivamente para cada tipo de pastilla de jabón.

La fábrica se está planteando ampliar la planta de producción con un coste de 200.000 euros, de forma que si se realiza la ampliación las disponibilidades de los componentes aumentarán en 50.000 ml de aceite, 70.000 ml de agua, 4 kg de sosa cáustica, 4 kg de glicerina, 1.000 ml de esencia de limón y 500 ml de esencia de fresa y además si se producen pastillas del tipo 3, se tendrán que realizar también del tipo 1.

Modelizar el problema de programación lineal entera que maximice el beneficio.

Soluciones.

1. Solución óptima: $(2, 0)$
   Valor óptimo: 8

2. Solución 1: 6 anuncios de 1 minuto entre películas y 1 entre partidos de fútbol
   Solución 2: 4 anuncios de 1 minuto entre películas y 2 entre partidos de fútbol.
   Coste mínimo total: 400000 €.

3.
   (a) Solución 1: 18 unidades de A y 11 de B.
   Solución 2: 20 unidades de A y 10 de B.
   Ingreso máximo total: 800 u.m.

   (b) Se introduce la variable binaria siguiente:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza la materia prima inicial} \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases}$$

4. Se consideran las variables binarias:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se incluye el artículo } i \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \quad ; \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

5. Para cada una de las zonas i, $(i = 1, 2, 3)$ se consideran las siguientes variables:

$$\begin{aligned} y_i &= \begin{cases} 1 & \text{si se construye la depuradora en la zona } i \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \\ x_i &= \text{Cantidad de agua tratada en la zona } i \end{aligned}$$

6. Las variables a considerar son:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se invierte en la inversión } i \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \quad ; \qquad (i = 1, \ldots, 7)$$

7. Se consideran las siguientes variables:

$$\begin{aligned} y_i &= \begin{cases} 1 & \text{si se produce } i \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \quad ; \\ x_i &= \text{número de unidades producidas del producto } i \end{aligned}$$

   para $i = 1, \ldots, 4$.

   Se introduce una variable binaria que toma el valor 1 si los productos se realizan en la planta A y 0 en caso contrario.

8. Se definen las variables:

$$\begin{aligned} y_i &= \begin{cases} 1 & \text{si se selecciona la ubicación } i \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \quad ; \\ x_{ij} &= \text{número de unidades enviadas desde la ubicación } i \text{ al cliente } j \end{aligned}$$

   para $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, \ldots, 4$.

9. Solución óptima: $(4, 2)$. Valor óptimo: 44

10. Se introducen las variables:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si se invierte la cantidad de } i \text{ cientos de € en la cía } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para $i = 1, 2, 3, 4, 5$; $j = 1, 2, 3$

11.

(a) Solución óptima: $(0, 3)$. Valor óptimo: 3

(b)

i. Si $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ y x_2 entera, la solución óptima sería: $(0'5, 2)$. Si $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ y x_1 entera, la solución óptima sería: $(0, 2'33)$

ii. Solución óptima: $(1, 2)$

12. Se consideran las variables:

$$x_i = \text{€ invertidos en el bono } i$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se invierte en el bono } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para $i = A, B, C, D, E$.

13.

(a) Solución óptima: $(13, 23)$. Valor óptimo: 95

(b) Soluciones óptimas: $(15, 20)$ y $(14, 22)$. Valor óptimo: 150

14. Las variables a considerar son:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre la planta } i \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \quad ; \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

15. Las variables a considerar son:

$$\begin{aligned} y_i &= \begin{cases} 1 & \text{si se fabrica la pieza tipo } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad ; \qquad (i = 1, \ldots, 5) \\ x_i &= \text{n}^o \text{ de piezas del tipo } i \text{ semanales} \\ y &= \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza la máquina 1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

16.

(a) Se introducen las variables:

$$\begin{aligned} y_i &= \begin{cases} 1 & \text{si se produce el producto } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad ; \qquad (i = A, B, C) \\ x_i &= \text{cantidad a producir del producto } i \end{aligned}$$

(b) Añadir la variable:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si se aumenta 1000 horas en la planta 2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

17.

(a) Solución óptima: $(4,3)$. Valor óptimo: 85

(b) olución óptima:$(4,3)$ con z=1. Valor óptimo: 80

18.

(a) Se consideran las siguientes variables:

$$\begin{aligned} y_i &= \begin{cases} 1 & \text{si se pone en marcha el juguete tipo } i \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} ; \\ z_j &= \begin{cases} 1 & \text{si se produce en la planta } j \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \\ x_i &= \text{número de juguetes producidos del tipo } i \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, 3.y.j = 1, \ldots, 3$

(b) Añadir la variable:

$$p = \begin{cases} 1 & \text{si el número de juguetes del tipo 3 es al menos 51} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

19. Las variables a considerar son:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se incluye la persona } i \text{ en la comisión} \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} ; \qquad (i = A, \ldots, J)$$

20.

(a) Se consideran las siguientes variables:

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} 1 & \text{si se continúa con la planta actual} \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} ; \\ x_i &= \text{número de unidades de C } i \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$

(b) Añadir las variables:

$$\begin{aligned} z &= \begin{cases} 1 & \text{si se lleva a cabo la expansión} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ x &= \text{número de trabajadores adicionales} \end{aligned}$$

21. Se consideran las siguientes variables:

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} 1 & \text{si se hacen anuncios Per} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; \\ x_1 &= \text{número de anuncios (Tvm)} \\ x_2 &= \text{número de anuncios (Tvn)} \\ x_3 &= \text{número de anuncios (Per)} \\ x_4 &= \text{número de anuncios (Sup)} \\ x_5 &= \text{número de anuncios (Rad)} \end{aligned}$$

22.

(a) Se consideran las siguientes variables:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se produce en el emplazamiento i} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases};$$

$$x_{ij} = \text{n}^o \text{ de lavadoras de la gama j producidas en el emplazamiento i },$$

i=1,2; j=a,m,b.

(b)

$$x_{ij} = \text{n}^o \text{ de lavadoras de la gama j producidas en el emplazamiento i },$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se produce en el emplazamiento i la gama j} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases};$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si se construye la factoría del emplazamiento i} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases};$$

i=1,2; j=a,m,b.

23. Se consideran las siguientes variables:

$$x_i = \text{n}^o \text{ de pastillas de tipo } J_i$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se produce } J_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases};$$

$$z = \begin{cases} 1 & \text{si se hace la ampliación} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases};$$

i=1,2,3,4



Investigación Operativa (3^o LADE)

Relación de Problemas Curso 2006-07
Tema 2: Programación Multiobjetivo.
Metas y Prioridades

Programación Multiobjetivo, Metas y Prioridades

1. Dado el problema:

$$Max\ (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$
$$\text{s.a} \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

   (a) Representar gráficamente el conjunto de soluciones factibles X.

   (b) Representar gráficamente el conjunto imagen $f(X)$.

   (c) Hallar las soluciones eficientes del problema.

   (d) Hallar la solución óptima del modelo ponderado multiobjetivo cuyos pesos son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$.

2. Se fabrican dos productos A y B utilizando tres procesos: cortado, doblado y empaquetado. La producción de una unidad del producto A requiere 10 unidades de tiempo de procesamiento en el departamento de cortado, 5 en el de doblado y 10 en el de empaquetado. Para una unidad de B se requieren 6,10 y 12 u.t., respectivamente. En cada sección se disponen de 2.400, 2.000 y 3.000 u.t. respectivamente. Producir una unidad de A ahorra 10 u.t. de procesamiento de pedidos y B ahorra 20. Al venderlos, el producto A produce un beneficio unitario de 20 u.m. y B de 30.

   (a) Determinar las cantidades eficientes de A y B de tal forma que el ahorro en el tiempo de procesamiento de pedidos sea máximo y también lo sea el beneficio.

   (b) ?'Qué sucede si la cantidad que se ahorra en una unidad de A aumenta de 10 a 20 u.t.?

   (c) ?'Qué sucede si la cantidad que se ahorra en una unidad de A aumenta de 10 a 40 u.t.?

3. El gerente de una empresa tiene que enviar un presupuesto a un cliente que tiene intención de comprar 10.000 unidades de un producto A y 12.000 unidades de un producto B. El gerente sabe que el coste directo unitario imputable a A es de 6 u.m. y a B de 5 u.m. Además hay unos costes fijos de puesta en funcionamiento de 30.000 u.m. El precio de venta de la competencia es de 10 u.m. y 8 u.m. por unidad de A y B respectivamente. El gerente quiere dar sus precios de venta en base a los siguientes criterios: que los precios de venta no superen a los de la competencia en cada producto, y alcanzar unos ingresos netos de al menos 60.000 u.m.

   (a) Modelizar el problema y comprobar que no tiene soluciones factibles.

   (b) En vista del apartado anterior, el gerente decide flexibilizar sus criterios haciendo uso de la programación con metas. Construir el modelo multiobjetivo de programación con metas asociado.

   (c) Plantear el problema en el caso de que el gerente además de flexibilizar sus criterios decide que los precios de venta no superen a los de la competencia es prioritario a que los ingresos netos superen las 60.000 u.m.

4. Un ayuntamiento quiere maximizar el empleo y los ingresos en un programa de tala controlada de árboles en un bosque de pinos y otro de eucaliptos. La tala de pinos produce, en promedio, empleo para 5 personas, genera ingresos por valor de 20.000 €, y requiere 0,8 bulldozer y 0,4 camiones por hectárea trabajada cada año. Los datos correspondientes en la tala de eucaliptos son 3 personas, 5.000 €, 0,4 bulldozer y 1,2 camiones. El Ayuntamiento dispone de un total de 4 bulldozers y 6 camiones. Además, no más de 4 hectáreas pueden ser taladas por año en cada bosque.

(a) Modelizar el problema multiobjetivo y calcular todas las soluciones eficientes del mismo.

(b) Resolver el problema suponiendo que el empleo es el objetivo prioritario, y en segundo lugar está la generación de ingresos.

(c) Suponiendo que la valoración por emplear a una persona es equivalente a la obtención de 10.000 € de ingresos, resolver el problema así ponderado.

5. Una empresa fabrica cuatro productos A, B, C y D. El comité ejecutivo se reune para decidir cuál será la combinación de productos. La tabla siguiente muestra las horas por unidad de producto que se requieren para montaje, pruebas y tiempo de máquina, así como el tiempo en los departamentos 1 y 2.

	A	B	C	D
montaje	4	15	5	2
pruebas	2	2	2	1
máquina	6	2	10	12
Depart.1	1	2	1	1
Depart.2	1/2	1	2	1

El beneficio por unidad de producto es del10 € en A, 50 en B, 20 en C y 5 en D. El gerente de producción señala que la empresa dispone de 3.000 horas de montaje, 1.000 horas para pruebas y 7.500 horas de tiempo de máquina. El controlador quiere la combinación que maximice beneficios; el gerente de ventas quiere obtener la mayor cuota de mercado; y el gerente de producción quiere equilibrar las instalaciones productivas. El presidente les indica que estos objetivos son potencialmente conflictivos y por ello les propone que flexibilicen sus criterios. Entonces el gerente de ventas considera a cada producto como una venta y como tal equivale a una cuota de mercado del 0,01%. El deseo del gerente es obtener al menos una cuota de mercado del 8%, es decir, 800 ventas. Al gerente de producción le preocupa el equilibrio de horas que se trabaja en ambos departamentos y quisiera que fuese el más parecido posible.

Dadas las nuevas propuestas, el presidente propone las siguientes metas y objetivos en el siguiente orden de prioridades:

i. la meta de lograr al menos 800 ventas

ii. la meta de lograr el equilibrio de horas trabajadas en ambos departamentos

iii. el objetivo de maximizar los beneficios.

Modelizar el problema sin resolverlo.

6. Una compañía produce escritorios, mesas y sillas. La producción de escritorios requiere 3 horas por unidad, las mesas 2 y las sillas 1. La capacidad normal de producción es de 40 horas semanales. Las horas adicionales se tienen que contratar como horas extras. El departamento de ventas limita la venta a un máximo de 10 escritorios, 10 mesas y 12 sillas por semana. Se han propuesto las siguientes prioridades:

i. Desea evitar la infrautilización de la capacidad normal de producción, es decir, no quiere despedir empleados.

ii. Tratar de satisfacer la orden de un cliente importante, consistente en 7 escritorios y 5 sillas.

iii. Evitar los tiempos extras de producción más allá de 10 horas semanales.

iv. Lograr vender semanalmente el máximo establecido por el departamento de ventas.

v. Minimizar los tiempos extras totales de la planta.

Modelizar el problema sin resolverlo.

7. Una empresa farmaceútica se ha puesto en contacto con una empresa de publicidad para montar una campaña de radio y televisión para introducir un nuevo producto. Los gastos totales de la campaña no excederán de 120 u.m. El cliente está interesado en que sus anuncios en radio sean en horas de máxima audiencia, y no gastar más de 90 u.m. en t.v. Teniendo en cuenta los diferentes costes, la empresa de publicidad estima que en promedio 1 u.m. invertida en t.v. genera 14.000 exposiciones (gente alcanzada al mes) y 14 minutos en antena acumulados; 1 u.m. invertida en radio en horas de máxima audiencia genera 6.000 exposiciones y 12 minutos. El cliente quiere que el total de minutos en antena sea al menos 1.680.

   (a) Comprobar que la empresa de publicidad no tiene una decisión óptima en el caso de que quiera maximizar el número total de exposiciones.

   (b) En vista del anterior resultado la empresa de publicidad indica a la empresa farmaceútica que tiene que flexibilizar sus planteamientos. Después de varias reuniones se introducen los siguientes cambios y prioridades:

      i. Pretende obtener un total de exposiciones de al menos 840.000.

      ii. Espera gastar no más de 90 u.m. en tv.

      iii. Desea que los minutos en antena sean al menos 1.680.

   Modelizar el problema con estas metas y prioridades, y resolverlo.

8. Un compañía posee 2 máquinas con las que puede producir un mismo producto. La máquina 1 hace 2 unidades por hora, mientras que la máquina 2 hace 3 unidades por hora. La compañia tiene un pedido de 160 unidades. Cada máquina puede operar 30 horas de tiempo regular aunque también es posible contratar tiempo extra. Se plantean las siguientes prioridades por orden:

   i. Tratar de satisfacer el pedido.

   ii. Desea que el tiempo extra de trabajo en cada una de las máquinas no sobrepase las 10 horas.

   Modelizar el problema sin resolverlo.

9. Resolver

$$
\begin{aligned}
& Min\ \pounds(y_2^-, y_3^-, y_1^-, y_4^-, y_1^+) \\
& s.\ a \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 - y_1^+ + y_1^- = 1.000 \\ x_1 - y_2^+ + y_2^- = 40 \\ x_2 - y_3^+ + y_3^- = 40 \\ y_3^+ - y_4^+ + y_4^- = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ y_j^+ \geq 0,\ y_j^- \geq 0,\ j = 1,2,3,4. \end{cases}
\end{aligned}
$$

10. Una empresa produce dos productos A y B. La producción de A requiere 3 horas por unidad y la de B, 2 horas por unidad. Semanalmente se disponen de 120 horas de tiempo normal de producción; las horas adicionales se consideran extras. El precio de venta es de 7 u.m. por cada unidad de A y de 8 u.m. por cada unidad de B, y el coste de cada hora de trabajo es de 2 u.m. Se han propuesto las siguientes prioridades:

    i. Se desea que los tiempos extras de producción no superen las 60 horas semanales.

    ii. Se desea producir al menos 20 unidades de A.

    iii. Se quiere maximizar los beneficios.

    Modelizar el problema y resolverlo.

11. Un ayuntamiento dispone de un máximo de 10 hectáreas para construir un parque público. El parque se descompondrá en dos zonas: zona de jardín y zona peatonal. El coste por hectárea de jardín es de 10 u.m. y el de cada hectárea peatonal es de 5 u.m. La parte dedicada a jardín debe estar entre 1 y 8 hectáreas (ambas inclusive) y la parte peatonal debe estar entre 2 y 5 hectáreas (ambas inclusive). Se tienen dos objetivos distintos: por un lado maximizar las hectáreas dedicadas a jardín y por otro lado minimizar el coste.

   (a) Hallar gráficamente el conjunto X de soluciones factibles del problema, representar su conjunto imagen $f(X)$, y hallar las soluciones eficientes.

   (b) Supóngase que se establece las siguientes prioridades:

      i. Se desea que el coste no supere las 60 u.m.

      ii. Se quiere maximizar la zona ajardinada.

   Modelizar el nuevo problema y resolverlo.

12. Una empresa que produce detergentes quiere sacar dos nuevos productos, A y B, al mercado. Ambos se producen mezclando los componentes 1 y 2. Una tonelada de A se obtiene mezclando ambos componentes en cantidades iguales. El detergente B lleva el 40% del componente 1 y el 60% restante del 2. Las cantidades mínimas que se pueden adquirir de componente 1 y 2 son 20 y 24 toneladas, respectivamente. La demanda mínima que se espera es de 12 toneladas para cada uno de los detergentes. El coste por tonelada del componente 1 es de 10 u.m. y de 20 u.m. por tonelada de 2.

   (a) Determinar las cantidades eficientes de los productos A y B si se quiere minimizar el coste total y si , dado su carácter contaminante, se quiere minimizar el empleo del componente 2. Obtener el conjunto de soluciones factibles X y el conjunto imagen f(X).

   (b) La empresa ha fijado el precio de venta del detergente A en 20 u.m. por tonelada , siendo de 25 u.m. el de tonelada de B. Si al problema anterior se le añade la tercera función objetivo consistente en maximizar los ingresos, dar una solución eficiente del nuevo problema multiobjetivo.

13. La empresa Tubos S.A. hace tres tipos de tubos A, B y C que vende a 10, 12 y 9 € por metro respectivamente. La producción de un metro de cada tubo requiere unos minutos de procesamiento, unos gramos de material de soldadura y un coste de producción en € que recoge la siguiente tabla:

	procesamiento	material soldadura	coste producción
A	5	100	3
B	4,5	100	4
C	6	100	4

   Para la próxima semana Tubos SA ha recibido un pedido excepcionalmente grande de 2000 metros de tubo A, 4000 metros de tubo B y 5000 metros de tubo C. En esa semana hay disponibles solamente 400 horas de tiempo de máquina y 550 kilos de material de soldadura. Debido a que la administración no espera que continúe el nivel de demanda tan alto, no desea extender las instalaciones de producción. Por consiguiente, está considerando la posibilidad de adquirir algunos tubos de proveedores japoneses con un coste de entrega de 6, 6 y 7 € por metro de tubo A, B y C respectivamente.

   (a) Modeliza, sin resolver, qué cantidades de cada tipo de tubo hay que producir y comprar para maximizar los beneficios y minimizar el coste total de las importaciones.

(b) El gerente de la empresa consciente del conflicto que puede haber entre los dos objetivos anteriores decide que sería más conveniente pretender alcanzar al menos un beneficio de 55000 € y limitar los gastos de importación como mucho a 40000 €. Modeliza, sin resolver, el problema teniendo en cuenta que se valora el doble la carencia de un € del beneficio con relación al exceso de un € en las importaciones.

14. El gerente de cartera Pension Planners dispone de 1.000.000 € para invertir en 4 fondos con diferentes rendimientos potenciales y riesgos asociados como se muestra en la siguiente tabla:

Fondo	1	2	3	4
Rendimiento (%)	35	20	12	10
Categoría de riesgo	alto	alto	medio	medio

Para controlar el riesgo la administración ha especificado las siguientes metas:

- La cantidad invertida en los fondos 1 y 2 sea al menos el 30% y el 20% de la cantidad disponible, respectivamente. Asignar pesos de acuerdo a los rendimientos.
- La cantidad total invertida en fondos de alto riesgo no sea superior al 75% de la cantidad disponible.
- La cantidad total invertida en fondos de medio riesgo esté entre el 20% y el 30% de la disponible.
- Obtener un rendimiento total de al menos el 15% de la inversión.

Plantear el problema multiobjetivo asociado a este problema, sin resolver.

15. Una ONG quiere mandar paquetes de ayuda a un determinado país. Dispone de dos tipos de paquetes. El paquete básico que cuesta 400 € y ayuda a 40 personas. El paquete avanzado que cuesta 800 € y ayuda a 50 personas. Se tienen ciertas limitaciones en los paquetes de ayuda. Sólo se puede enviar un máximo de 40.000 paquetes de los cuales al menos 5000 deben ser avanzados. Se han propuesto las siguientes prioridades a las metas siguientes:

   i. Evitar que el coste de la ayuda supere los 20 millones de dólares.

   ii. Lograr que la ayuda llegue al menos al 20% de los 11 millones de ciudadanos de este país.

   Modelizar el problema y resolver el problema relajado. ¿Cuál sería la solución si el orden de prioridades fuese el contrario?

16.

(a) En un hospital quieren preparar un menú con 5 ingredientes A, B, C, D y E para que la comida proporcione al menos 63.000 miligramos (mg) de proteína, 10 mg de hierro, 15 mg de niacina, 1 mg de tiamina y 50 mg de vitamina C. Cada 100 gramos de los ingredientes proporciona la cantidad de cada nutriente que se indica en la siguiente tabla.

mg/100gr	proteinas	hierro	niacina	tiamina	vitamina	grasa
A	5000	1,1	1,4	0,18	0,0	5000
B	29300	1,8	5,4	0,06	0,0	5000
C	5300	0,5	0,9	0,06	10,0	7900
D	3000	2,2	0,5	0,07	28,0	300
E	4000	1,2	0,6	0,15	3,0	14300

Para que la comida esté bien equilibrada y guste al paciente no tendrá más de 300 gramos de A, 300 gramos de B, 200 gramos de C, 100 gramos de D y 100 gramos de E. Además la cantidad de A debe ser al menos tres veces la de D. Por otro lado, los costes por cada 100 gramos de cada ingrediente son:

Ingredientes	euros/100gr.
A	0,15
B	0,80
C	0,12
D	0,20
E	0,51

Modelizar este problema para minimizar el contenido total de grasas y los costes de la comida. ¿Puede darse el caso de que o bien la cantidad de grasa o el coste sean cero?

(b) Si se minimizan por separado las dos funciones objetivo anteriores se establece un conflicto: las cantidades óptimas de ingredientes son distintas. El director del hospital propone que se introduzcan unas metas y unas penalizaciones (ponderaciones). En concreto, se establece como meta que el coste de la comida no sea superior a 2 € y se penalizará en la misma medida. Además se desea que el contenido de grasa en la comida no sea superior a 55.000 mg. y se estima que se estaría dispuesto a pagar 0,009 céntimos para reducir un miligramo la cantidad de grasa en la comida. Modelizar este problema. ¿El valor óptimo de la función objetivo ponderada es el coste total de la comida?

17. Resolver: Min $L\ (\ y_1^-,\ y_4^+,\ y_2^- + y_3^+,\ y_5^-)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^+ + y_1^- = 90 \\ x_1 - 2x_2 - y_2^+ + y_2^- = 0 \\ x_1 - 4x_2 - y_3^+ + y_3^- = 0 \\ y_1^+ - y_4^+ + y_4^- = 10 \\ x_1 + 2x_2 - y_5^+ + y_5^- = 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0\,(i = 1, ..., 5) \end{cases}$$

18. Una empresa química elabora un compuesto mezclando dos de sus productos CS-01 y CS-02. Cada litro de CS-01 cuesta 3 u.m. y proporciona 5 gr. de sodio y 2 gr. de azufre a la mezcla resultante. Cada litro de CS-02 cuesta 1 u.m. y proporciona 2 gr. de sodio y 1 gr. de azufre. La mezcla resultante tiene que contener al menos 9 gr. de sodio y 4 gr. de azufre.Se establecen las siguientes metas:

- Producir 4 litros de mezcla.
- Un costo no superior a 5 u.m.

Se pide:

(a) Modelizar y resolver el problema si la primera prioridad de la empresa es que el costo no sea superior a 5 u.m. y la segunda prioridad que la producción sea igual a 4 litros de mezcla.

(b) Modelizar el problema anterior suponiendo que cada u.m. de costo excedido tiene la misma ponderación que cada litro de exceso de mezcla producida y 2 veces la ponderación de cada litro de mezcla por debajo de los 4 litros pretendidos.

19. Una empresa se dedica a la producción de motores y compresores. Cada motor requiere 2,25 horas de tiempo de producción y cada compresor 1,5 horas. El acabado y el control de calidad de cada motor requiere 1,5 horas y 3 horas para cada compresor. El espacio que ocupan en el almacén es 1,5 metros cúbicos cada uno (indistintamente). Los costes unitarios de almacenamiento son de 200 y 400 €, respectivamente. Los beneficios unitarios son de 30 y 50 €, respectivamente. La disponibilidad de tiempo de producción es de 13.500 horas y de acabado y el control de calidad de 18.750 horas. Se proponen las siguientes prioridades con metas:

i. Evitar exceder la capacidad de almacenamiento de 11.250 metros cúbicos.

ii. Tratar de gastar no más de 2.000.000 € en el almacenamiento.

iii. Lograr vender al menos 3.000 unidades de cada producto.

iv. Obtener un beneficio de al menos 300.000 €.

Modelizar y resolver el problema relajado asociado.

20. Una compañía produce dos clases de pintura para el hogar: pintura para exteriores y para interiores. Para ello utiliza dos materias primas A y B. La disponibilidad máxima de A es de 2 tm. diarias; la de B es de 8/3 tm. Los requerimientos diarios de las materias primas por tonelada de cada tipo de pintura vienen recogidos en la siguiente tabla.

Tns de Materia Prima por Tns de pintura

	P.exterior	P.interior	Disponibilidad Máxima
M.prima A	1/3	2/3	2
M.prima B	2/3	1/3	8/3

En un estudio de mercado se establece que la demanda diaria de pintura interior no puede exceder a la de pintura exterior en más de 1 tonelada.

Además, una tonelada de pintura exterior origina α u.m. de beneficio y una de pintura interior 3 u.m. Por otra parte, para producir una tonelada de pintura se necesitan 3 horas si es exterior y 8 en el caso de que. sea interior.

(a) Modeliza el problema para el caso en que la compañía pretendiera obtener el máximo beneficio y además emplear el mayor número de horas posible para ofrecer un mayor empleo.

(b) Halla gráficamente las soluciones eficientes de este problema para el caso en que α=2.

(c) Halla gráficamente las soluciones del problema para los valores de $\alpha \in [0, 1]$.

21. Resolver el problema siguiente.

Min L (y_1^-, y_2^+, y_4^+, y_3^+)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - y_1^+ + y_1^- = 8 \\ x_1 - x_2 - y_2^+ + y_2^- = -1 \\ x_1 + x_2 - y_3^+ + y_3^- = 4 \\ x_2 - y_4^+ + y_4^- = 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ y_i^+ \geq 0, y_i^- \geq 0 \, (i = 1, ..., 4) \end{cases}$$

22. Una empresa dispone de dos tipos de maquinas A y B. Por cada hora de trabajo en la maquina A se obtienen 20 piezas y 30 piezas por cada hora en la maquina B. Por motivos de capacidad de la empresa no se pueden fabricar al día más de 600 piezas y menos de 250. Además debido a las características de las dos maquinas el coste por unidad producida por la maquina A es de 4€ y 3€ por unidad producida por B. Determinar las horas diarias óptimas para las dos maquinas con las siguientes metas y prioridades:

i. El coste total diario no supere los 2000€.

ii. Las horas de trabajo diarias en las maquinas A y B sean iguales.

iii. Maximizar el número de piezas diarias.

23. Una fábrica de caramelos produce dos tipos de caramelos C1 y C2. Cada kg de caramelo C1 se vende a 200 euros y contiene 100 gr de azúcar y 200 gr de frutas, cada kg de caramelo C2 se vende a 300 euros, contiene 400 gr de azúcar y 400 gr de frutas. La producción de C1 debe superar la de C2 en al menos 5 kg. Además el contenido de fruta debe ser al menos de1.600 gr.

(a) Buscar las soluciones eficientes que maximicen el ingreso y minimicen el contenido de azúcar.

(b) Se sabe que la reducción de 1 kg de azúcar equivale a la reducción de 2 euros en los ingresos. Modelizar, no resolver, el problema ponderado.

(c) Si el coste de embalaje de los caramelos es de 0,1 euros por kg para los caramelos de tipo C1 y 0,2 euros por kg para C2. Obtener una solución eficiente que maximice el ingreso, minimice el azúcar y minimice el coste de embalaje.

Soluciones.

1. (c) No hay soluciones eficientes.

   (d) Soluciones óptimas: $\{(1,0)+\lambda(1,1)\,|\lambda \geq 0\}$.

2.
   (a) x_1 = cantidad de A, x_2 = cantidad de B. Solución eficiente: (150,125).

   (b) Soluciones eficientes: $\overline{(150,125)(180,100)}$.

   (c) Soluciones eficientes: $\overline{(150,125)(180,100)} \cup \overline{(180,100)(240,0)}$.

4.
   (a) x_1 = hectáreas de bosque de pino, x_2 = hectáreas de bosque de eucalipto. Soluciones eficientes: $\overline{(3,4)(4,2)}$.

   (b) Solución óptima: (3,4), empleo óptimo: 27 personas, ingresos óptimos: 80.000 €.

   (c) $\lambda_1 = 10.000$, $\lambda_2 = 1$. Soluciones óptimas: $\overline{(3,4)(4,2)}$, valor óptimo: 350.000 €.

7.
   (a) x_1 = unidades monetarias invertidas en t.v., x_2 = unidades monetarias invertidas en radio en horas de máxima audiencia.

   (b) Se invertirán 90 u.m. en t.v. y 30 u.m. en radio en horas de máxima audiencia. Se usará todo el presupuesto, se generarán 1.440.000 exposiciones y los minutos en antena serán de 1620.

9. Soluciones óptimas: $\overline{(40,60)(55,45)}$.

10. Se producirán 20 unidades de A y 60 unidades de B. Los tiempos extras de producción serán 60 horas semanales, se producirán 20 unidades de A y se obtendrán 260 u.m.

11.
   (a) Soluciones eficientes: $\overline{(1,2)(8,2)}$.

   (b) 5 hectáreas de zona ajardinada, 2 hectáreas de zona peatonal y un gasto de 60 u.m.

12.
   (a) Soluciones eficientes: 24 Toneladas de A y 20 Toneladas de B.

   (b) Una solución eficiente: 12 Toneladas de A y 35 Toneladas de B.

13. Se consideran las variables:

$$\begin{aligned} x_i &= \text{metros de tubo de tipo } i \text{ producidos } (i = \text{A,B,C}) \\ y_i &= \text{metros de tubo de tipo } i \text{ comprados } (i = \text{A,B,C}) \end{aligned}$$

14. Se consideran las variables:

$$x_i = \text{cantidad invertida en el fondo } i \ (i = 1,2,3,4)$$

15. Se consideran las variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{n}^o \text{ de paquetes básicos} \\ x_2 &= \text{n}^o \text{ de paquetes avanzados} \end{aligned}$$

(a) Se enviarán 30000 paquetes básicos y 10000 avanzados, con un coste de 20 millones de € y la ayuda llegará a 1700000 personas

(b) Se enviarán 40000 paquetes básicos únicamente, con un coste de 32 millones de € y la ayuda llegará a 2000000 personas

16. Se consideran las variables:

$$x_i = \text{cientos de gramos del ingrediente } i \ (i = A, B, C, D, E)$$

17. Solución óptima: $\left(\frac{200}{3}, \frac{100}{3}\right)$; $y_1^- = y_2^- = y_4^- = y_2^+ = y_4^+ = y_5^+ = 0; y_1^+ = 10; y_3^- = \frac{200}{3}; y_5^- = \frac{200}{3}$

18.

(a) Se consideran las variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{litros de CS-01 utilizados} \\ x_2 &= \text{litros de CS-02 utilizados} \end{aligned}$$

Soluciones óptimas: $\overline{(\frac{1}{3}, \frac{11}{3})(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})}; y_1^+ = 0; y_1^- = 0; y_2^+ = 0; y_2^- \geq 0.$

19. Se consideran las variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{unidades de motores} \\ x_2 &= \text{unidades de compresores} \end{aligned}$$

Solución óptima: 4000 motores y 3000 compresores, que ocupan un espacio en el almacén de 3500m^3 y tienen un gasto de almacenamiento de 2000000 de € y un beneficio de 270000€.

20.

(a) Se consideran las variables:

$$\begin{aligned} x_E &= \text{Tm. de pintura exterior producidas diariamente.} \\ x_I &= \text{Tm. de pintura interior producidas diariamente} \end{aligned}$$

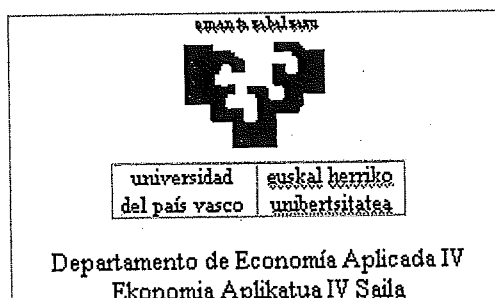
(b) Soluciones eficientes: $\overline{(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})(\frac{4}{3}, \frac{7}{3})}$

(c) Solución eficiente: $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$

21. La solución óptima es (2,3). En las metas primera y segunda no hay ni exceso ni defecto, en la tercera hay un exceso de 1 y en la cuarta hay también un exceso de 1.

22. Las horas óptimas de trabajo diarias de la máquina A son 11,775 y de la máquina B también 11,765. Se producirán 235,3 piezas en A y 352,95 piezas en B (total 588,25) con un coste de 2000€.

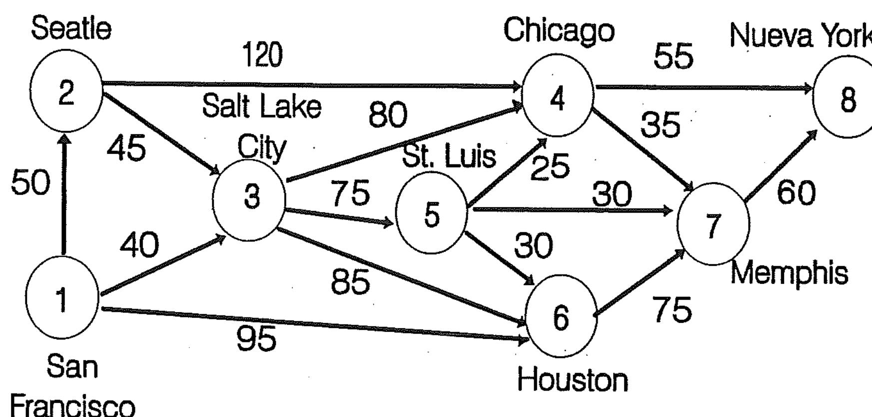
23. (a) Soluciones eficientes: producir 8 Kg. o más de C1 y nada de C2.



Investigación Operativa (3º LADE)

Relación de Problemas Curso 2006-07
Tema 3: Modelos en Redes

1. El Servicio Postal US desea conocer la ruta más económica entre San Francisco y New York para entregar los paquetes postales de una ciudad a otra, según los posibles itinerarios que se muestran en el siguiente grafo:



El coste de transporte de cada envío viene dado (en unidades monetarias) sobre cada arco de la red.

(a) Calcular la ruta de menor coste entre San Francisco y New York.

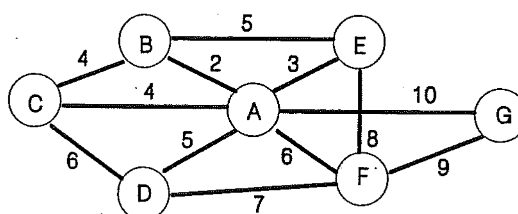
(b) ¿Cuál sería la ruta más económica entre San Francisco y Memphis?

2. Una empresa envía un producto desde sus 2 fábricas a 5 mercados diariamente. Para ello tiene contratadas las siguientes capacidades de transporte:

Mercado	1	2	3	4	5
Fábrica 1	3	5	6	3	4
Fábrica 2	4	5	1	3	0

Hallar el plan de envío máximo del producto para un día en el que la producción es de 4 y 5 kg. en las fábricas 1 y 2 respectivamente. La demanda se estima en 3,2,4,1 y 4 kg. en los mercados 1 a 5.

3. Una Compañía está diseñando el sistema de un nuevo equipo coordinado detector de humo para sus instalaciones. Las conexiones eléctricas posibles entre los 7 locales en los que debe funcionar el sistema son los que se muestran en el grafo junto con las distancias entre ellos. ¿Qué sistema conectará todos los detectores usando la mínima longitud total de conexiones eléctricas?

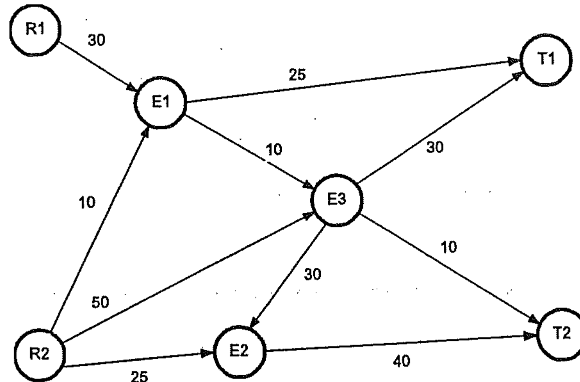


4. Una empresa desea planificar su reemplazamiento de equipo para los próximos 5 años. Los costes de mantenimiento y operación y el valor recuperado dependen de la edad del equipo tal y como se recogen en la tabla siguiente:

Edad (años)	Coste anual de mantenimiento	Valor recuperado
1	1000$	8000$
2	1500$	4000$
3	2000$	2000$
4	3000$	1000$
5	4000$	0$

El precio de compra del equipo para cada uno de los 5 años es de 10000$, 11500$, 12000$, 13000$ y 14000$ respectivamente. Elabora una red para representar las políticas de reemplazamiento posibles. Calcula la política de reemplazamiento para el periodo de 5 años que minimice el coste total neto (Coste de adquisición +coste de mantenimiento-valor recuperado), teniendo en cuenta que al inicio del año 1 se debe comprar un equipo nuevo y que al final del periodo no se desea tener ningún equipo.

5. Dos refinerías R1 y R2 envían un producto de gasolina a dos terminales de distribución T1 y T2 a través de tres estaciones de bombeo, como se muestra en el grafo siguiente. Cada arco viene valorado por la capacidad máxima diaria que se puede enviar, en cientos de miles de litros.



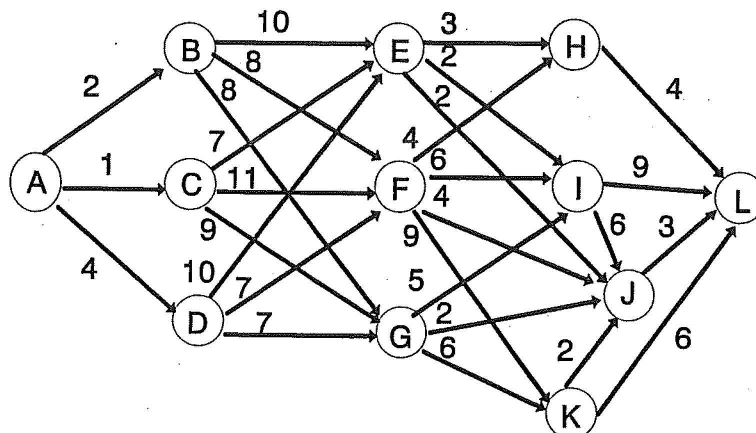
Determinar la cantidad máxima diaria que se puede enviar desde las refinerías a las terminales de distribución. Si la capacidad del arco (E1, T1) aumenta de 25 a 40 ¿cuanto aumentaría la cantidad máxima?

6. Una persona acaba de comprarse un nuevo coche por 12000$. El coste anual de mantenimiento depende de la edad del coche al comienzo del año. Para evitar el elevado coste de mantenimiento asociado con un coche viejo, puede venderlo y comprar uno nuevo. El precio de venta depende de la edad del coche en el momento de la venta. Los costes de mantenimiento y los precios de venta se recogen en la siguiente tabla:

Edad del coche (años)	Coste anual de mantenimiento	Precio de venta
1	2000$	7000$
2	4000$	6000$
3	5000$	2000$
4	9000$	1000$
5	12000$	0$

Para simplificar los cálculos supongamos que en cualquier año el coste de comprar un coche nuevo es de 12000$. Elabora una red para representar las políticas de reemplazamiento posibles. Calcula la política de reemplazamiento para el periodo de 5 años que minimice el coste total neto (Coste de adquisición +coste de mantenimiento-valor recuperado). Suponer que al final del año 5 se vende el coche independientemente de su edad.

7. Dada la red:



Determinar la ruta más corta y la ruta más larga entre A y L. ¿Cuál sería la ruta más corta entre A y K?

8. Una inmobiliaria dispone de 4 pisos que quiere vender y tiene ofertas de 5 clientes A, B, C, D y E. Cada cliente solo está interesado en adquirir un único piso y cada piso solo será vendido a un único cliente. Las ofertas realizadas por cada cliente son las siguientes (en decenas de miles de euros):

	P1	P2	P3	P4
A	-	12	18	15
B	12	14	17	19
C	11	17	15	16
D	14	17	22	-
E	13	-	20	17

donde – significa que no está interesado.

(a) Resolver, mediante el método húngaro, el problema de asignar los 4 pisos a 4 de los 5 clientes maximizando los ingresos de la inmobiliaria.

(b) Si la inmobiliaria decide que al cliente C le va a vender un piso, construir (sin resolver el problema) la tabla que utilizaríamos para encontrar mediante el método húngaro la asignación óptima.

(c) Si la inmobiliaria decide retirar el piso 4 (sólo tres a la venta) y los clientes C y D imponen la condición de que o bien a ambos se les asigna un piso o a ninguno de los dos, plantear el problema como un problema de PLE.

9. El personal de una empresa está formado por tres técnicos T_1,T_2,T_3 y cinco obreros especializados O_1,O_2,O_3,O_4 y O_5. La siguiente tabla muestra una puntuación que valora el rendimiento obtenido en anteriores trabajos cuando un técnico y un obrero han coincidido en el mismo equipo

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
T_1	6	4	17	4	-
T_2	6	-	19	3	4
T_3	15	4	19	6	5

donde -: indica incompatibilidad. Teniendo en cuenta que a cada técnico le debe corresponder al menos un obrero especializado y no más de dos:

(a) Modelizar el problema como un problema de programación lineal.

(b) ¿Cómo deben formarse los equipos de trabajo para maximizar el rendimiento?

10. Una empresa que en 3 de sus plantas tiene exceso de capacidad de producción, ha decidido iniciar en ellas la producción de cuatro nuevos productos A, B, C y D. Los productos requieren un mismo esfuerzo productivo por unidad, por lo que la capacidad de producción disponible en las plantas se mide por el número de unidades de cualquier producto que se pueden obtener por día. Estas cantidades son de 75 unidades para las plantas 1 y 2 y de 45 unidades para la planta 3. La producción diaria para satisfacer las ventas proyectadas es de 20 unidades para el producto A, 30 para B, 30 para C y 40 unidades para D. El coste (en unidades monetarias) por unidad de cada producto difiere entre una planta y otra, como se indica en la tabla.

Planta\Producto	A	B	C	D
1	41	27	28	24
2	40	29	-	23
3	37	30	27	21

La gerencia necesita tomar la decisión de cómo planificar la producción diaria entre las plantas. Determinar, aplicando el método húngaro, cómo debe hacerlo si cada producto se fabrica exclusivamente en una planta y las 3 deben ser utilizadas.

11. La utilidad de cuatro empleados E_1,E_2,E_3 y E_4 en cada uno de los cuatro puestos de trabajo A,B,C y D, se muestra en la tabla siguiente:

	A	B	C	D
E_1	6	2	8	5
E_2	5	3	9	4
E_3	2	3	8	4
E_4	4	2	6	6

(a) Determinar la asignación óptima.

(b) Si por necesidades del servicio dos de entre los empleados han de ser sustituidos por otros dos nuevos, el E_5 y E_6, cuya utilidad en cada uno de los puestos de trabajo se muestra en la siguiente tabla:

	A	B	C	D
E_5	5	3	9	4
E_6	4	5	7	6

¿A qué tabla aplicaríamos el método húngaro para determinar los dos empleados que deberían ser sustituidos? Resolverlo.

12. Se dispone de tres posibles ubicaciones para localizar a lo sumo una planta en cada una de ellas. Dependiendo de la ubicación, la posible planta supondría un coste de construcción y podría satisfacer una demanda total máxima, según la siguiente tabla:

	Ubicación 1	Ubicación 2	Ubicación 3
coste construcción	10	14	13
demanda total máxima	20	30	45

Se dispone de 4 clientes, A, B, C y D, cada uno con una cierta demanda que debe ser servida en su totalidad por una única planta. Esta demanda, así como el beneficio de servir una unidad del producto desde cada potencial planta, está dada en la siguiente tabla:

	A	B	C	D
Demanda	15	15	10	15
Ubicación 1	6	4	5	4
Ubicación 2	3	3	5	1
Ubicación 3	1	5	2	4

(a) Modelizar un modelo de programación lineal entera para determinar qué plantas deben ser construidas y a qué clientes debe servir cada una de ellas, maximizando los beneficios menos los costes.

(b) Si se decide construir las tres plantas y las tres deben ser utilizadas, determinar aplicando el método húngaro, desde qué ubicación se debe atender a cada cliente si su demanda debe ser servida en su totalidad por una única planta para obtener el beneficio máximo.

13. Una cadena de cines cuenta con 3 salas (S_1, S_2, S_3), una en cada barrio de la ciudad. En estos momentos tiene 3 películas (P_1, P_2, P_3) para proyectar cada película en una única sala. Cuenta para ello con un estudio de audiencia que le proporciona una estimación del número de espectadores para cada película en cada sala:

	P_1	P_2	P_3
S_1	700	550	600
S_2	500	500	600
S_3	600	500	500

(a) Siendo el objetivo maximizar el número de espectadores en total, ¿cuál será la asignación óptima?

(b) Sin embargo, la dirección tiene que replantearse una nueva distribución, ya que las películas ganadoras de oscar no han sido las previstas y lo han sido P_4 y P_5. Los espectadores estimados para cada una de ellas en cada una de las salas son:

	P_4	P_5
S_1	700	1000
S_2	700	700
S_3	600	700

Por supuesto desean programarlas, para lo que se plantean dos alternativas:

1. Incorporarlas obligatoriamente sustituyendo a otras dos anteriormente programadas.
2. La otra alternativa es añadir nuevas sesiones en 2 salas y así poder programar todas las películas, teniendo en cuenta que en cada sala se debe proyectar al menos 1 película y no más de 2.

Decide, para cada alternativa y usando el método húngaro, en qué sala se proyectará cada película si se quiere maximizar el número de espectadores.

14. Una empresa, Lindsay Oil, es la responsable del transporte de crudo entre 7 tanques. Las capacidades (en cientos de galones por día) de los oleoductos de un tanque a otro quedan recogidas en la siguiente tabla:

Oleoducto	Capacidad
del 1 al 2	15
del 1 al 3	20
del 2 al 4	15
del 2 al 7	8
del 3 al 4	10
del 3 al 5	10
del 4 al 5	8
del 4 al 6	10
del 5 al 7	12
del 6 al 7	10

La empresa pretende enviar el crudo desde el tanque 1 al tanque 7. El beneficio obtenido por cada galón enviado es de 10$ por día.

(a) ¿Cuál es el beneficio diario máximo que se puede obtener transportando galones de crudo del tanque 1 al 7?

(b) Lindsay Oil planea doblar la capacidad del oleoducto por el que envía crudo del tanque 2 al 7. El coste de esta ampliación de capacidad es de 450000$. Teniendo en cuenta la distribución de envío obtenida en el apartado (a), calcula el tiempo mínimo en el que podrá amortizar dicha inversión.

15. El centro está confeccionando los horarios del curso que viene y con objeto de satisfacer al máximo las preferencias de los alumnos ha realizado una encuesta entre ellos. Tras procesar las respuestas ha obtenido una puntuación entre 0 y 10 para cada asignatura en cada uno de los horarios como se recoge en la siguiente tabla:

Horas de clase	3-4	4-5	5-6	6-7
Econometría	6	7	3	5
Investig. Operativa	4	8	5	4
Ec. de la Empresa	5	4	3	3
Auditoría	2	5	6	6

(a) ¿Cuál será la distribución del horario de clases con mayor puntuación total?

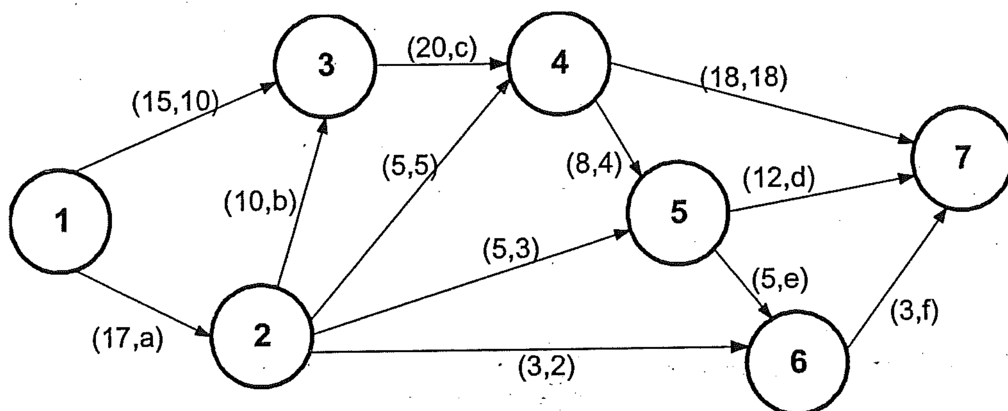
(b) El horario de mayor puntuación se lo remite a los distintos responsables de las asignaturas para que lo aprueben o, en su caso, presenten sus objeciones. Si el profesor de Investigación Operativa no puede impartir clase de 4 a 5 por causas justificadas, ¿cuál será el nuevo horario que propondrá la dirección a los alumnos y que incorporará dicha imposibilidad?

(c) Los alumnos, tras estudiar esta última propuesta, dicen estar dispuestos a acudir a clase a las 2 si así se consigue un horario de mayor puntuación respetando la imposibilidad del apartado b) y siempre que el horario definitivo no tenga huecos, es decir, horas intermedias libres. La puntuación para cada asignatura en el horario de 2 a 3 es:

	Econometría	I. Operativa	Ec. Empresa	Auditoría
2-3	6	8	6	4

¿ Cuál sería el horario definitivo que maximice la puntuación?

16. Dada la siguiente red donde el primer número del par asignado representa la capacidad del arco:



Responde a las siguientes preguntas:

(a) ¿Para qué valores de a, b, c, d, e y f la asignación de los segundos números del par correspondiente a cada arco será un flujo que atraviese la red?

(b) Determina el flujo cuando e = 0. ¿Cuál es el valor del flujo máximo que atraviesa la red?

17. Una compañía de reforestación sembrará árboles en 8 zonas en la misma área. Para ello debe desarrollar un sistema de caminos de tierra para tener acceso a cualquier zona desde cualquier otra. La distancia (en kms) entre cada par de zonas viene dada en la tabla siguiente:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	1.3	2.1	0.9	0.7	1.8	2.0	1.5
2		-	1.6	1.8	1.2	2.6	2.3	1.1
3			-	2.6	1.1	2.5	1.9	1.1
4				-	0.7	1.6	1.5	0.9
5					-	0.9	1.1	0.8
6						-	0.6	1.0
7							-	0.5
8								-

Determinar entre qué par de zonas deben construirse caminos para conectarlas todas entre sí, no necesariamente de forma directa, con una longitud total mínima.

18. Una empresa dispone, en la actualidad, de una máquina que lleva 2 años funcionando y se plantea su política óptima de reemplazamiento para los próximos 5 años. Una máquina nueva tiene un coste de 52 unidades monetarias. El coste de mantenimiento anual, el valor recuperado por la venta y el rendimiento anual de la máquina según su edad (años de funcionamiento) se encuentran en la tabla adjunta

Edad	1	2	3	4	5
Coste de mantenimiento anual	1	2	3	4	6
Valor recuperado por la venta	43	39	35	32	28
Rendimiento anual	15	15	14	12	10

El seguro de mantenimiento que tiene establecido la empresa impone que después de 5 años de uso cada máquina sea obligatoriamente retirada. Además la empresa ha decidido que al final del periodo de 5 años sea vendida la máquina con independencia de su edad. Elabora una red para representar las políticas de reemplazamiento posibles. Calcula la política de reemplazamiento que maximice los beneficios (rendimientos + valor recuperado - costes) en el periodo de 5 años, teniendo en cuenta que en el instante inicial debes decidir si continuas o reemplazas la máquina de edad 2

19. Dos empresas utilizan la misma distribuidora para suministrar un producto a 4 ciudades. La producción mensual de las empresas es de 50 y 35 unidades, respectivamente. Se desea atender las demandas de las 4 ciudades que son de 12, 17, 21 y 28 unidades. La capacidad de transporte de la distribuidora viene dada en la siguiente tabla:

	C_1	C_2	C_3	C_4
E_1	15	20	15	20
E_2	3	5	10	10

(a) Modelizar el problema como un problema de programación lineal para maximizar el número de unidades de producto que se pueden enviar.

(b) Resolver el problema mediante el método del flujo máximo.

20. Una empresa va a determinar su política de reemplazamiento de equipo para los próximos 4 años. El coste de adquisición del equipo para cada uno de los 4 años es de 7000 u.m. Los costes de mantenimiento y el valor recuperado cuando se reemplaza el equipo dependen de la edad del equipo y son los que se recogen en la siguiente tabla:

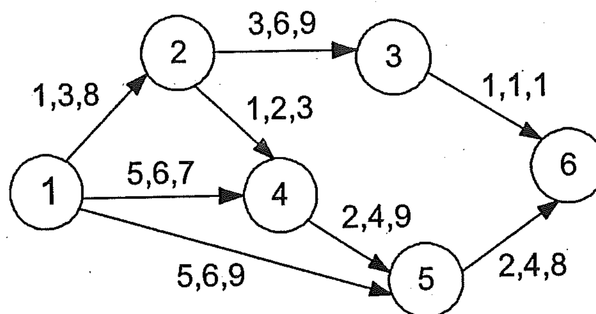
Edad	coate anual mantenimiento	valor recuperado
1	1000	4000
2	1000	2500
3	2000	2000
4	3000	0

(a) Elabora una red para representar las políticas de reemplazamiento posibles. Calcula la política de reemplazamiento para el periodo que minimice el coste total neto (coste de adquisición +coste de mantenimiento-valor recuperado), teniendo en cuenta que al inicio del año 1 se debe comprar un equipo nuevo y que al final del periodo no se desea tener ningún equipo.

(b) Parece que va a entrar en vigor una nueva legislación que va a exigir la revisión de un equipo cada dos años, siempre que no se reemplace, con un coste de 2000 u.m por revisión. ¿Cómo incluirías esta información en la red anterior?. ¿Cambiaría la política de reemplazamiento de coste mínimo obtenida en el apartado anterior?

21. Dado el siguiente grafo, en el cual están representadas las actividades de un proyecto, con los

tiempos optimista, modal y pesimista en días:



(a) Determinar los márgenes de las actividades, la duración media estimada del proyecto con su correspondiente varianza y el camino crítico.

(b) ¿Qué efecto tendría sobre la duración media estimada del proyecto si se considerase que el tiempo pesimista de la actividad (1,2) fuese de 11 días en lugar de 8? ¿Y sobre el comienzo más temprano de las actividades (3,6) y (4,5)?

22. Los responsables de un proyecto de Construcción han estimado las duraciones optimista, modal y pesimista (expresadas en meses) de las distintas actividades que lo componen y se reflejan en la tabla adjunta:

Activ.	Descripción	Arco	t_o	t_m	t_p
A	Diseño	(1,2)	10	12	16
B	Selección de lugar	(2,3)	2	8	36
C	Selección proveedores	(2,4)	1	4	5
D	Selección personal	(2,6)	2	3	4
E	Preparación del lugar	(3,5)	8	12	20
F	Fabricar estructuras	(4,5)	15	18	30
G	Preparar material	(4,6)	3	5	8
H	Instalar estructuras	(5,7)	2	4	8
I	Formación	(6,7)	6	9	12
J	Obtención de licencia	(7,8)	4	6	14

(a) Determinar la duración media estimada del proyecto y el camino crítico.

(b) Si antes de comenzar el diseño del proyecto, a los responsables del mismo se les ha presentado la oportunidad de adquirir un terreno y, por tanto, ya no es necesario incluir la actividad B. ¿Cuál es la duración media estimada del proyecto y el camino crítico?

23. Los trabajos iniciales para la construcción de un edificio, que se destinará a planta industrial, así como sus respectivas duraciones, son las indicadas en la tabla adjunta:

Act.	Descripción	Tiempo esperado (días)
A	Petición permiso de agua	15
B	Petición permiso de luz	15
C	Anteproyecto	15
D	Solicitud de licencias	20
E	Proyecto y encargo de estructuras	10
F	Cimentación	15
G	Solicitud y entrega de anclajes	15
H	Colocación de estructura	2
I	Fabricación de forjados	11

Las relaciones de precedencia son:

- Una vez realizado el anteproyecto, podremos hacer el proyecto y el encargo de la estructura.
- Para comenzar la cimentación debemos tener concluidas la petición del permiso de agua y luz, solicitud de licencias y encargo de la estructura.

- Una vez terminado el encargo de la estructura, podremos solicitar los anclajes.
- Para la colocación de la estructura, es necesario haber terminado previamente la cimentación y la entrega de anclajes.
- La fabricación de forjados va inmediatamente después del encargo de la estructura.

Con estos datos:

(a) Elaborar el grafo asociado a este proyecto.

(b) Obtener la duración prevista del proyecto, camino crítico y calendario.

(c) El día 30 se hace un control sobre la obra y se observa que a la actividad G le faltan aún 12 días para su terminación y la actividad I lleva 2 días de realización, siguiendo las demás actividades su planificación prevista. Indicar si sufre variación la duración prevista del proyecto y, en caso afirmativo, en qué cuantía.

24. La dirección de una empresa encarga a un equipo de Investigación Operativa la planificación de un proyecto. El equipo operativo, tras un análisis de las características y particularidades del proyecto, determina las 8 actividades que, a su entender, lo componen y observa la siguiente relación de precedencia entre las mismas:

Actividad	Duración	Antecedentes inmediatos
A_1	2 semanas	-
A_2	4 semanas	-
A_3	3 semanas	A_2
A_4	6 semanas	A_2
A_5	4 semanas	A_1 , A_3
A_6	10 semanas	A_1 , A_3
A_7	5 semanas	A_4 , A_5
A_8	4 semanas	A_6 , A_7

(a) Elabora un grafo que recoja el proyecto. Construye la tabla de actividades del proyecto e indica el camino crítico.

(b) ¿Cómo afectaría a la duración prevista del proyecto un retraso de 2 semanas en la actividad A_5?

(c) El grafo dibujado se lo remiten a la dirección de la empresa que, si bien no tiene idea sobre las reglas de construcción de un grafo, conoce perfectamente el proyecto y observa que se han de incluir otras dos actividades (A_9 y A_{10}) no mencionadas en el análisis. De cada una de ellas se sabe lo siguiente:

- La actividad A_9 requiere que esté acabada la A_8 y tiene una duración de 5 semanas.
- La actividad A_{10} dura 5 semanas.
- Para poder empezar la A_{10} necesita que esté acabada la actividad A_3.
- La actividad A_{10} tiene que estar acabada para que se inicie la A_7.

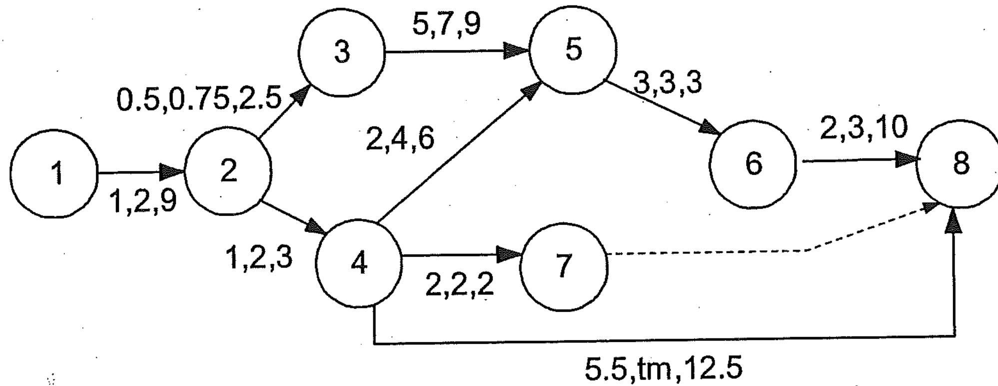
Elabora un nuevo grafo añadiendo estas actividades al grafo anterior y calcula la duración prevista del proyecto y el camino crítico.

25. Consideremos un proyecto formado por 9 actividades. La tabla siguiente recoge dichas actividades, su duración y las relaciones de precedencia entre las mismas:

Actividades	Duración	Actividades precedentes inmediatas
a	4	-
b	6	-
c	8	a
d	9	a
e	5	a
f	3	b, c
g	2	b, c
h	1	d, f
i	4	e, g, h

Elabora, sin añadir ninguna actividad ficticia, una red que represente el proyecto.

26. En el siguiente grafo se encuentran representadas las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades que componen un proyecto. Junto a cada actividad aparecen sus duraciones optimista, más probable y pesimista (en días), salvo en el caso de la actividad (4,8) de la que se conoce su valor mínimo y máximo pero se desconoce su valor modal, tm



Contesta razonadamente a las siguientes preguntas bajo el supuesto de que tm toma un valor menor o igual a 12 días:

(a) ¿Es posible calcular la duración media estimada del proyecto, los márgenes de las actividades y el camino crítico independientemente del valor que tome el tiempo modal de la actividad (4,8)? Calcúlalos, en función de tm, si esto fuera necesario.

(b) ¿Qué le ocurriría a la duración media estimada del proyecto si la actividad (3,5) sufre un retraso de 3 días respecto a su duración media? ¿ Qué le ocurriría a la duración media estimada del proyecto si dicha actividad acaba 3 días antes de su duración media?

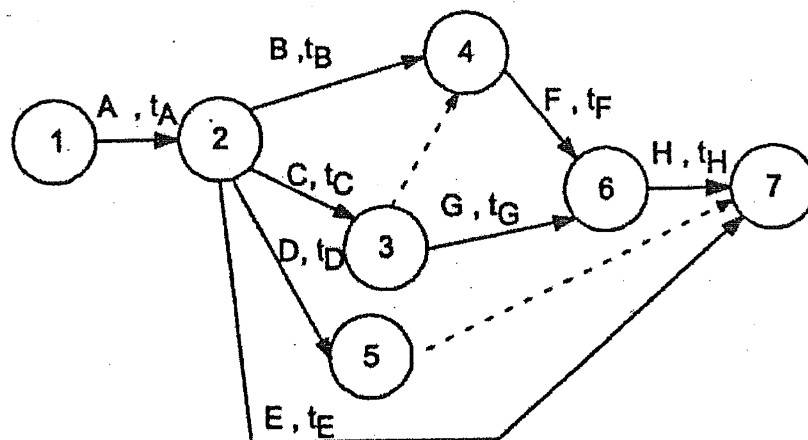
(c) ¿Se ve afectado el margen de las actividades (4,5) y (4,7) por un retraso de 1 día en la duración media de la actividad (2,4)?

27. En la siguiente tabla se presentan el conjunto de actividades en las que se encuentra dividido un proyecto junto con sus relaciones de precedencia:

Actividades	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Precedentes inmediatas	-	-	-	a, b	a, b	a, b	d, e, f	c	c	e	f	g, j, k

Construir un grafo asociado al proyecto.

28. En el siguiente grafo se representa un proyecto con los nombres de las actividades y sus duraciones en los arcos:



Contestar razonadamente a cada una de las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué condición deberán cumplir las duraciones de las actividades del proyecto para que el comienzo más temprano de las actividades F y G coincidan? ¿Y para que coincidan sus finales más tardíos?

(b) ¿Qué condición deberán cumplir las duraciones de las actividades del proyecto para que el comienzo más temprano de las actividades B y C coincidan? ¿ Y para que coincidan sus finales más tardíos?

(c) ¿Qué condición deberán cumplir las duraciones de las actividades del proyecto para que coincidan los márgenes de las actividades E y D? Si E es una actividad crítica expresar, en función de las duraciones de las actividades del proyecto, hasta cuando se podrá retrasar la actividad D sin retrasar la duración prevista del proyecto.

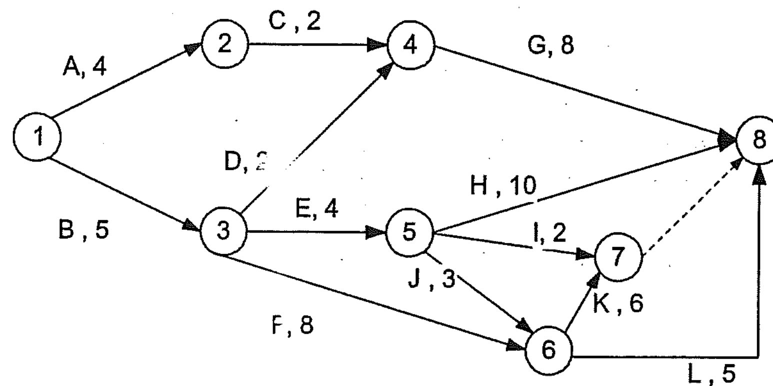
29. Se considera un proyecto para el que se van a desarrollar las actividades que aparecen recogidas en la siguiente tabla, junto con sus relaciones de precedencia:

Actividad	Prec. Inmediata
A	-
B	-
C	-
D	A, C
E	A, B
f	A, B
G	A, B
H	D, G
I	E, F

(a) Elaborar un grafo que represente el proyecto.

(b) Si se añaden tres nuevas actividades: J, K y L de forma que la actividad J sólo se puede realizar una vez que esté terminada la actividad G y las actividades K y L se llevarán a cabo a continuación de la actividad E, incorporar estas actividades en el grafo anterior.

30. El grafo adjunto recoge un proyecto donde en cada uno de sus arcos se presenta el tiempo de duración, en días, de cada una de las actividades junto con el nombre de las mismas.



(a) Calcular la duración prevista del proyecto y el camino crítico. ¿Cuál es el comienzo más tardío de la actividad D? ¿Y el final más temprano de la C?

(b) ¿Cuál es el margen de la actividad F? Si la actividad F dura 6 días y el resto de las actividades del proyecto se comportan como en el grafo original, ¿cómo afectará este cambio a la duración prevista del proyecto? ¿Y si dura 10 días?

(c) ¿Cuál es el margen de la actividad D? Si la actividad D dura 1 día y el resto de las actividades del proyecto se comportan como en el grafo original, ¿cómo afectará este cambio a la duración prevista del proyecto? ¿Y si dura 6 días?

(d) Si se han de incorporar dos nuevas actividades, M y N, que tienen como único antecedente inmediato C y que no preceden inmediatamente a ninguna otra actividad, ¿cómo quedaría un nuevo grafo que represente al proyecto?

31. La puesta en marcha de un restaurante familiar requiere la realización de las siguientes actividades:

A_1: Solicitar y obtener permisos municipales.

A_2: Diseñar el local de acuerdo al presupuesto destinado a esta partida.

A_3: Determinar requerimientos de personal de acuerdo al presupuesto destinado a gastos de personal.

A_4: Llevar a cabo la obra del local.

A_5: Comprar bienes de equipo necesarios (Congeladores, neveras, cafetera...).

A_6: Instalar los bienes de equipo.

A_7: Contratar al personal.

A_8: Comprar mercancías e instalarlas en sus dependencias.

En la siguiente Tabla quedan recogidos los tiempos de duración y las relaciones de precedencia de dichas actividades:

Actividades	Duración	Actividades Precedentes inmediatas
A_1	15 días	-
A_2	20 días	-
A_3	1 día	-
A_4	30 días	A_1,A_2
A_5	10 días	A_1,A_2
A_6	5 días	A_4,A_5
A_7	7 días	A_3,A_6
A_8	5 días	A_7

(a) Elabora una red que representa el proyecto

(b) Halla la tabla de actividades. Calcula la duración prevista del proyecto y el camino crítico del mismo.

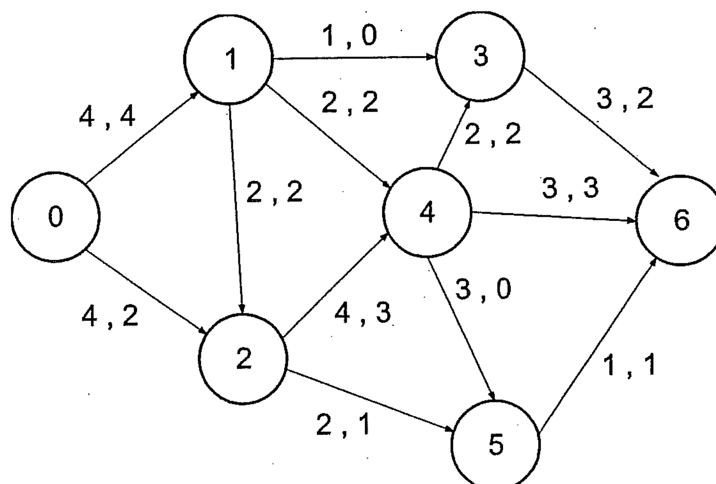
(c) Construye el diagrama de Gantt o calendario del proyecto. Indica la variación que sufre la duración prevista del proyecto si el día 40 desde iniciado el mismo observamos que a la obra del local le faltan 15 días para su total realización.

32. El dueño de un local se está planteando la duración de los contratos de arrendamiento de dicho local. La tabla siguiente recoge los cálculos de la utilidad esperada, en cientos de euros, si arrienda desde el inicio del año i hasta el inicio del año j

i \ j	2	3	4	5
1	12	22	38	40
2	-	13	20	29
3	-	-	10	19
4	-	-	-	12

El dueño quiere conocer cuándo arrendar y por cuánto tiempo para maximizar la utilidad esperada durante los próximos 4 años.

33. Dada la siguiente red:



(a) Indicar una cadena de origen a destino que no sea un camino y que pase por el nodo 5.

(b) Si los valores de los arcos representan la capacidad del flujo (izda) y el valor del flujo del arco (dcha), calcular, si es posible, una cadena de crecimiento (no saturada) asociada a este flujo.

(c) Partiendo del flujo dado, obtener el valor del flujo máximo.

34. En la siguiente tabla quedan recogidas las duraciones (días) y las relaciones de precedencia de las actividades que forman un proyecto:

Actividades	Duración	Precedentes Inmediatas
A	4	-
B	6	-
C	7	-
D	t	A
E	5	B, D
F	1	A
G	2	B, D
H	3	C, E

donde la duración de la actividad D viene dada por la variable t.

(a) Elaborar una red que represente el proyecto.

(b) ¿Cuál es la duración del proyecto si la duración de la actividad D es menor de 2 días? Elaborar la tabla de actividades del proyecto, señalando las actividades críticas.

(c) Si la actividad D puede retrasarse hasta $\frac{1}{2}$ día sin alterar la duración del proyecto, ¿cuál es la duración de la actividad D?

Soluciones

1. (a) Ruta más económica: (S. Francisco, Salt Lake, Chicago, New York)
   Coste Mínimo total: 175 u.m.
   (b) (S. Francisco, Salt Lake, St. Louis, Memphis).

2. Valor del flujo máximo: 9 kg

3. Solución 1: $(\{A,B\},\{A,E\},\{C,B\},\{A,D\},\{A,F\},\{F,G\})$
   Solución 2: $(\{A,B\},\{A,E\},\{A,C\},\{A,D\},\{A,F\},\{F,G\})$
   Valor: 29.

4. Coste mínimo total: 21000$.
   La solución corresponde a comprar el equipo el año 1, mantenerlo durante un año y comprar un nuevo equipo el año 2 que se mantendrá hasta el final.

5. a) Valor del flujo máximo: 105 cientos de miles de litros. b) Aumentaría en 10.

6. Coste mínimo total: 31000$.

7. Ruta más corta entre A y L: (A,C,E,J,L).
   Valor de la ruta más corta: 13.
   Ruta más corta entre A y K: { (A,B,G,K) / (A,C,G,K) }
   Valor de la ruta más corta: 16.
   Ruta más larga entre A y L: { (A,C,F,I,L) / (A,C,F,I,J,L) / (A,C,F,K,L) }
   Valor de la ruta más larga: 27.

8. a) Asignación óptima:

B	→	P4
C	→	P2
D	→	P3
E	→	P1

   Valor óptimo: 71 decenas de miles de euros.

9. b) Asignación óptima:

T_1	→	O_2
T_2	→	O_3 y O_5
T_3	→	O_1 y O_4

   Valor óptimo (máximo rendimiento): 48.

10. Asignación óptima:

Planta 1	→	B y C
Planta 2	→	A
Planta 3	→	D

    Valor óptimo: 3290 u.m.

11. a) Asignación óptima:

    (a)

E_1	→	A
E_2	→	C
E_3	→	B
E_4	→	D

    Valor óptimo (máxima utilidad): 24 unidades de utilidad.

    b) Asignación óptima:

(a)
$$\begin{array}{lcl} E_1 & \rightarrow & A \\ E_4 & \rightarrow & D \\ E_5 & \rightarrow & C \\ E_6 & \rightarrow & B \end{array}$$

Por tanto los empleados que deberían ser sustituidos son: E_2 y E_3.

12. a) $y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se construye la planta en la ubicación i} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna la planta en la ubicación i al cliente j} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

b) Asignación óptima:

Planta 1 $\rightarrow$ A
Planta 2 $\rightarrow$ C
Planta 3 $\rightarrow$ B y D

Beneficio máximo (sin incluir el coste de costrucción de las tres plantas): 275 u.m.

13. a) Asignación óptima:

$$\begin{array}{lcl} S_1 & \rightarrow & P_1 \\ S_2 & \rightarrow & P_3 \\ S_3 & \rightarrow & P_2 \end{array}$$

Audiencia esperada máxima: 1800 espectadores.

b) Alternativa *i* :

$$\begin{array}{lcl} S_1 & \rightarrow & P_5 \\ S_2 & \rightarrow & P_4 \\ S_3 & \rightarrow & P_1 \end{array}$$

Alternativa *ii* :

$$\begin{array}{lcl} S_1 & \rightarrow & P_1 \text{ y } P_5 \\ S_2 & \rightarrow & P_3 \text{ y } P_4 \\ S_3 & \rightarrow & P_2 \end{array}$$

14. a) Beneficio máximo diario: 30000$

b) 90 días

15. a) Econometría de 6 a 7; Investig. Operativa de 4 a 5; Ec. de la Empresa de 3 a 4; Auditoría de 5 a 6.

b) Econometría de 4 a 5; Investig. Operativa de 5 a 6; Ec. de la Empresa de 3 a 4;Auditoría de 6 a 7.

c)Econometría de 4 a 5; Investig. Operativa de 2 a 3; Ec. de la Empresa de 3 a 4; Auditoría de 5 a 6.

16. (a) $\begin{cases} 10 + a = 18 + d + f \\ a = b + 10 \\ 10 + b = c \\ c + 5 = 22 \\ 7 = d + e \\ e + 2 = f \\ 0 \leq a \leq 17; 0 \leq b \leq 10; \quad 0 \leq c \leq 20 \\ 0 \leq d \leq 12; 0 \leq e \leq 5; \quad 0 \leq f \leq 3 \end{cases}$

(b) Valor del flujo máximo: 32

17. Solución 1: $\{\{7,8\},\{6,7\},\{1,5\},\{4,5\},\{5,8\},\{2,8\},\{3,5\}\}$

Solución 2: $\{\{7,8\},\{6,7\},\{1,5\},\{4,5\},\{5,8\},\{2,8\},\{3,8\}\}$

Valor: 5.5 Kms.

18. Beneficio máximo: 74 u.m.

Políticas óptimas: i) Reemplazar la máquina en el instante actual. Reemplazarla al inicio del año 3 y mantenerla hasta el final. ii) Reemplazar la máquina en el instante actual. Reemplazarla al inicio del año 4 y mantenerla hasta el final. iii) Mantener la máquina actual hasta el inicio del año 2 y reemplazarla en este instante y al inicio del año 4 y mantenerla hasta el final.

19. b) Valor del flujo máximo: 78 unidades.

20. a) Las políticas optimas de reemplazamiento son tres: 1) el equipo que compramos inicialmente lo cambiamos al año siguiente y este último lo mantenemos hasta el final. 2) el equipo que compramos inicialmente lo cambiamos transcurridos 2 años y este último lo mantenemos hasta el final. 3) el equipo que compramos inicialmente lo cambiamos transcurridos 3 años y este último lo mantenemos hasta el final.

b) La política optima de reemplazamiento: el equipo que compramos inicialmente lo cambiamos transcurridos 2 años y este último lo mantenemos hasta el final.

21. (a)

(i,j)	(1,2)	(1,4)	(1,5)	(2,3)	(2,4)	(3,6)	(4,5)	(5,6)
$M(i,j)$	0,5	0	$4{,}1\hat{6}$	$4{,}\hat{3}$	0,5	$4{,}\hat{3}$	0	0

Duración media estimada del proyecto es de $14{,}8\hat{3}$ días.
Varianza de la duración media estimada del proyecto es de $2{,}47\hat{2}$ días.
Camino crítico (1,4,5,6).

(b) La duración media estimada del proyecto sigue siendo de $14{,}8\hat{3}$ días.
El comienzo más temprano de la actividad (4,5) no se ve afectado.
El comienzo más temprano de la actividad (3,6) se retrasa 0,5 días.

22. (a) Duración media estimada del proyecto: 48 meses.
Camino crítico: (1, 2, 3, 5, 7, 8).
$var(T) = \sum_{(i,j)\in CC} \sigma^2_{t(i,j)} = 40,87$

(b) Duración media estimada del proyecto: 46,83 meses.
Camino crítico: (1, 2, 4, 5, 7, 8).
$var(T) = 11,46$.

23. b) Duración prevista del proyecto: 42 días.
c) La d.p.p. aumenta en 2 días.

24. (a) Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 21 semanas.
(b) M(A_5)=1.
(c) Duración prevista del proyecto (d.p.p.): 26 semanas.

26. (a) Duración media estimada del proyecto 18 días. Camino Crítico (1,2,3,5,6,8).

Act. (i,j)	(1,2)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,5)	(4,7)	(4,8)	(5,6)	(6,8)
M(i,j)	0	0	2	0	2	11	$10-\frac{2}{3}t_m$	0	0

(b) El proyecto se retrasa 3 días.
(c) Se reduce 1 día.

28. (a) CMT(F)=CMT(E) $\Longleftrightarrow t_C \geq t_B$
FMT*(F)=Q(6)=FMT*(G) para cualquier duración.
(b) CMT(B)=P(2)=CMT(C) para cualquier duración.
FMT*(B)=FMT*(C) $\Longleftrightarrow t_G \leq t_F$
(c) M(E)=M(D) $\Longleftrightarrow t_E = t_D$
Hasta $t_E - t_D$

30. (a) Duración prevista del proyecto 19 días. Caminos críticos (1,3,5,8) y (1,3,6,7,8). CMT*(D)=9. FMT(C)=6.
(b) M(F)=0.
(c) M(D)=4.

31. b) Duración prevista del proyecto 67 días.

    c) Duración prevista del proyecto pasa a ser de 72 días.

32. La solución óptima es arrendar con un contrato desde el inicio del primer año hasta el inicio del cuarto año, y luego otro nuevo contrato por un año. La utilidad óptima es de 5000 euros.

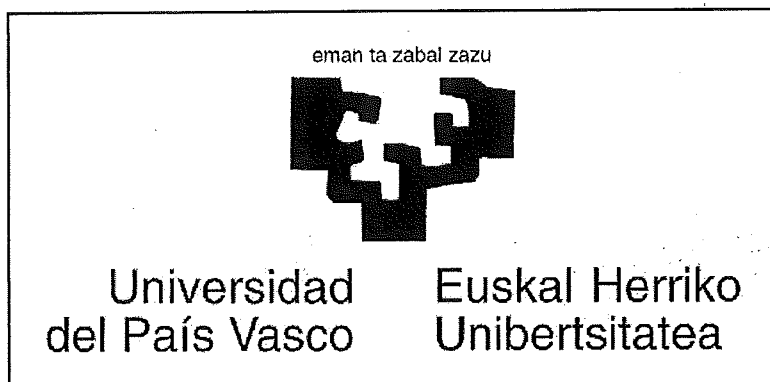
33. c) Valor del flujo máximo: 7.

34. b) Duración prevista del proyecto: 14 días.

    c) La duración de la actividad D es de1.5 días.

Nº 195

Código: 15476
Licenciatura:LADE
Curso:3º
Línea:Troncal
Cuatrimestre:2º
Créditos:6



Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomi Eta Enpresa Zientzien Fakultatea

Programa de la Asignatura
INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Año Académico
2006/2007

Curso
3º

Licenciatura L.A.D.E

Línea Curricular/Tipo de Asignatura
Troncal

Departamento
ECONOMIA APLICADA IV

Profesores que imparten la asignatura durante el curso 2006/07:

1. Aramendia Ruiz Miguel Angel.
2. Aristondo Etxeberria Ohiana (castellano y euskera)
3. Diez Sanchez Henar.
4. Etxarri Hernández J.Miguel.
5. Puerta Gil Carmen
6. Urrutia Careaga A.Marta.
7. Lasaga Txoperena, Xabier (euskera)

(indicar cual de ellos imparte el grupo/s de euskera)

Objetivos de la asignatura (max. 6 líneas):

Impartir un curso básico de algunos de los modelos deterministas más elementales dentro de la Investigación Operativa. Además de familiarizarse con estos modelos, el alumno/a debe ser capaz de reproducir los mecanismos mentales(intuiciones, conjeturas, analogías, razonamientos heurísticos) que permiten modelizar, con intuición y rigor, al tiempo que solucionar la amplia gama de problemas asociados a ellos.

Estructura de temas:

1. PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

1.1 Formulación de problemas de Programación Lineal Entera.
1.2 Método de ramificación y acotación (Branch and Bound).
1.3 Otros métodos de resolución.

2. PROGRAMACIÓN MULTIOBJETIVO Y POR METAS

2.1 Introducción a la Programación Multiobjetivo.
2.2 Programación por metas.
2.3 Programación por prioridades.

3. MODELOS EN REDES

3.1 Conceptos básicos.
3.2 Problema del árbol de expansión minimal.
3.3 Problema del camino más corto.
3.4 Problema del camino más largo.
3.5 Problema del flujo máximo.
3.6 Problema de asignación.
3.7 Planificación de Proyectos: Métodos C.P.M. y P.E.R.T.

Competencias especificas de la asignatura:
Aportar racionalidad al análisis y a la descripción de cualquier aspecto de la realidad económica.
Evaluar consecuencias de distintas alternativas de acción y seleccionar las mejores dados los objetivos.
Aplicar al análisis de los problemas criterios profesionales basados en el manejo de instrumentos técnicos.

Metodología Docente:
-Clases teóricas 22 horas.
-Clases prácticas 22 horas.
-Introducción al manejo del paquete informático QSB 1 hora.

Sistemas de evaluación:
Examen escrito, coherente con los objetivos antes descritos; en este examen el alumno/a debe reflejar la comprensión conceptual y la habilidad adquirida para resolver situaciones prácticas.

Observaciones:
Se recomienda haber cursado con anterioridad la asignatura Matemáticas III.

Referencias Bibliográficas Básicas:
RIOS, S. (1988): "Investigación Operativa. Optimización". Ed. Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.

Yih-Long Chang .Quantitative Systems (QS). Prentice Hall.

Referencias Bibliográficas Complementarias:

HILLIER, F.; LIEBERMAN, G.J. (1997): "Introducción a la Investigación de Operaciones". Ed. McGraw-Hill, México.

TAHA, H.A. (1998): "Investigación de Operaciones, una Introducción". Ed. Prentice Hall, México.

WINSTON, W.L. (1994) Investigación de Operaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, México.